Autovalori e autovettori

Definizione 1 (per endomorfismi)**.** Sia V uno spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$ e $f : V \mapsto V$ un suo endomorfismo. Si dice *autovettore* per f ogni vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x},$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Lo scalare λ è detto *autovalore* di f (associato ad $\mathbf{x}$).

Teorema 1. *Sia* $f : V \mapsto V$ *un endomorfismo di* V*, e indichiamo con* $i : V \mapsto V$ *l'applicazione identica. Uno scalare* $\lambda \in \mathbb{K}$ *è un autovalore per* f *se, e solamente se,*

$$\ker(f - \lambda i) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un autovettore per f di autovalore λ. Allora $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} = \lambda i(\mathbf{x}).$$

Pertanto,

$$f(\mathbf{x}) - \lambda i(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{x} \in \ker(f - \lambda i)$. La tesi segue. $\square$

Sia ora $\dim V = n$. Poiché

$$n = \dim V = \dim \operatorname{im}(f - \lambda i) + \dim \ker(f - \lambda i),$$

si ha $\ker(f - \lambda i) \neq \{\mathbf{0}\}$ se, e soltanto se,

$$\dim \operatorname{im}(f - \lambda i) < n.$$

Fissata una base $\mathfrak{B}$ di V e indicata con F la matrice associata all'endomorfismo f rispetto detta base, l'ultima condizione diviene

$$\operatorname{rango}(F - \lambda I) < n,$$

ovvero

$$\det(F - \lambda I) = 0.$$

La scrittura $\det(F - \lambda I)$ corrisponde ad un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata λ. Esso è indicato con

$$\chi_F(\lambda) = \det(F - \lambda I),$$

e viene chiamato *polinomio caratteristico di* F; esso ha sempre grado n.

Definizione 2 (per matrici)**.** Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata di ordine n. Si dice *autovettore* per A ogni vettore colonna $X \in \mathbb{K}^{n,1} \setminus \{O\}$ tale che esista un $\lambda \in \mathbb{K}$ con

$$AX = \lambda X.$$

Lo scalare λ è detto *autovalore* di A (associato a X).

Osserviamo che una matrice $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ induce un endomorfismo $f : \mathbb{K}^{n,1} \mapsto \mathbb{K}^{n,1}$ dato da

$$f(X) = FX,$$

per ogni $X \in \mathbb{K}^{n,1}$. Chiaramente, gli autovalori di questo automorfismo f e quelli della matrice F coincidono; inoltre X è autovettore per F se, e solamente se, X è autovettore per f.

Teorema 2. *Sia* $F \in \mathbb{K}^{n,n}$. *Uno scalare* $\mu \in \mathbb{K}$ *è autovalore per* F *se, e solamente se,*

$$\chi_F(\mu) = 0.$$

Dimostrazione. Affinché μ sia autovalore per F è necessario che esista un vettore colonna $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ con $X \neq O$ tale che

$$FX = \mu X.$$

In particolare X deve essere una soluzione non banale del sistema lineare omogeneo

$$(F - \mu I)X = O.$$

Soluzioni di tale fatta esistono se, e solamente se, il sistema non è di Cramer, cioè

$$\det(F - \mu I) = 0.$$

Questo corrispondere a chiedere che μ sia radice del polinomio caratteristico di F, $\chi_F(\lambda)$. □

Teorema 3. *Matrici simili hanno il medesimo polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ due matrici simili. Allora, esiste $C \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $B = C^{-1}AC$. Pertanto,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \frac{1}{\det C} \det(A - \lambda I) \det C = \det C^{-1} \det(A - \lambda I) \det C = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det(B - \lambda I) = \chi_B(\lambda).$$

La tesi segue. □

In particolare, due matrici simili hanno sempre i medesimi autovalori.

I seguenti teoremi saranno formulati nel caso delle matrici. Risultati analoghi valgono comunque anche qualora si considerino endomorfismi generici di spazi vettoriali finitamente generati.

Teorema 4. *Sia* $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ *e supponiamo che* λ *sia un suo autovalore. L'insieme*

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{K}^{n,1} : FX = \lambda X\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,1}$. *Tale insieme consta di tutti gli autovettori di* F *associati all'autovalore* λ *e del vettor nullo. Esso è detto* autospazio *dell'autovalore* λ.

Dimostrazione. L'insieme V_λ corrisponde all'insieme di tutte le soluzioni $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ del sistema lineare omogeneo

$$(F - \lambda I)X = O.$$

Pertanto, esso risulta essere uno spazio vettoriale. □

Teorema 5. *Siano* λ, μ *due autovalori distinti della medesima matrice* F. *Allora,*

$$V_\lambda \cap V_\mu = \{O\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo $X \in V_\lambda \cap V_\mu$. Allora,

$$FX = \lambda X = \mu X,$$

da cui

$$(\mu - \lambda)X = O.$$

Poiché $\lambda \neq \mu$, la relazione di cui sopra implica $X = O$, da cui segue la tesi. □

Definizione 3. Sia $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ e supponiamo che μ sia un suo autovalore. Si dice *molteplicità algebrica di* μ (in simboli, $m_a(\mu)$) la molteplicità di μ come radice del polinomio caratteristico $\chi_F(\lambda)$. È detta invece *molteplicità geometrica di* μ (in simboli, $m_g(\mu)$) la dimensione dell'autospazio V_μ.

In particolare $m_a(\mu)$ è il più grande intero tale che

$$(\mu - \lambda)^{m_a(\mu)} | \chi_F(\lambda);$$

invece,

$$m_g(\mu) = \dim V_\mu = n - \mathrm{rango}(F - \mu I).$$

Teorema 6. *Sia* $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ *e supponiamo che* μ *sia un suo autovalore. Allora,*

$$1 \leqslant m_g(\mu) \leqslant m_a(\mu).$$

Dimostrazione. Se μ è autovalore per F, allora esiste almeno un vettore non nullo $X \in V_\mu$; pertanto la dimensione di V_μ deve essere almeno 1. Sia ora $d = m_g(\mu)$; sia $\mathfrak{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_d\}$ una base di V_μ e e costruiamo una base $\mathfrak{B} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_d, B_{d+1}, \ldots, B_n\}$ di $\mathbb{K}^{n,1}$ completando $\mathfrak{Q}$ a base di tutto lo spazio vettoriale. Denotiamo con G la matrice di cambiamento di base in $\mathbb{K}^{n,1}$ dalla base canonica alla base $\mathfrak{B}$. Per il Teorema 3, la matrice F e la matrice $F' = G^{-1}FG$ hanno il medesimo polinomio caratteristico. D'altro canto, poiché $Q_1, Q_2, \ldots, Q_d$ sono autovettori di F di autovalore μ, la matrice F' assume la forma a blocchi

$$F' = \begin{pmatrix} \mu I_d & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

ove I_d è la matrice identica $d \times d$, O la matrice nulla $(n-d) \times d$, B una matrice $d \times (n-d)$ e C una matrice $(n-d) \times (n-d)$. In particolare, sviluppando il polinomio caratteristico di F' si vede che esso è della forma

$$\chi'_F(\lambda) = (\mu - \lambda)^d \chi_C(\lambda) = \chi_F(\lambda).$$

Pertanto, la molteplicità algebrica di μ è almeno d. Questo completa la dimostrazione. □

Definizione 4. Una matrice si dice *diagonalizzabile* se, e solamente se, essa è simile ad una matrice diagonale.

Teorema 7. *Una matrice* $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ *è diagonalizzabile se, e solamente se, chiamati* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ *i suoi autovalori si ha*

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \ldots + m_g(\lambda_t) = n.$$

Dimostrazione. Sia $V = \mathbb{K}^{n,1}$. Per il Teorema 5, autospazi associati ad autovalori differenti si intersecano nel solo vettor nullo; pertanto,

$$\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_t}) = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots + \dim V_{\lambda_t}.$$

In particolare, per l'ipotesi del corrente teorema abbiamo

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_t} = V$$

e la somma è diretta. Per ogni $i = 1, \dots, t$, consideriamo una base $\mathfrak{B}_i$ di V_{λ_i}. Osserviamo che

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \dots \cup \mathfrak{B}_t$$

è un insieme di n autovettori linearmente indipendenti per F. Pertanto $\mathfrak{B}$ è una base di V. Ripetto questa base la matrice F assume forma diagonale. $\square$

La matrice di cambio di base costruita nel teorema precedente è detta *matrice diagonalizzante* per F.

Osserviamo che una matrice $F \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile se, e solamente se, le seguenti condizioni sono contemporaneamente soddisfatte

1. tutte le radici del polinomio caratteristico di F appartengono al campo $\mathbb{K}$ e

2. la molteplicità algebrica di ogni autovalore di F coincide con la sua molteplicità geometrica.

Enunciamo il seguente teorema, senza dimostrazione.

Teorema 8. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice* simmetrica*, cioè tale che $A^T = A$. Allora A è diagonalizzabile.*