7 Spazi affini (I)

In questo paragrafo introdurremo gli "spazi affini", che generalizzano il piano e lo spazio ordinari, e nei quali lo spazio dei vettori è assegnato nella definizione. Negli spazi affini si studiano esclusivamente le proprietà geometriche deducibili per mezzo dell'uso dei vettori.

7.1 DEFINIZIONE *Sia* **V** *uno spazio vettoriale su* K. *Uno* spazio affine su **V** (*ovvero uno* spazio affine con spazio vettoriale associato **V**) *è un insieme non vuoto* **A**, *i cui elementi si dicono* punti *di* **A**, *tale che sia data un'applicazione*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V} \tag{7.1}$$

che associa ad ogni $(P, Q) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ *un vettore di* **V**, *denotato con* $\overrightarrow{PQ}$ *e chiamato* vettore di punto iniziale P e di punto finale Q, *in modo che i seguenti due assiomi siano soddisfatti:*

SA1 *Per ogni punto* $P \in \mathbf{A}$ *e per ogni vettore* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *esiste un unico punto* $Q \in \mathbf{A}$ *tale che*

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}.$$

SA2 *Per ogni terna* P, Q, R *di punti di* **A** *è soddisfatta la seguente identità:*

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Per ogni $(P, Q) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ *diremo* P punto di applicazione del vettore $\overrightarrow{PQ}$. *Se* K = R (K = C) **A** *si dice* spazio affine reale (spazio affine complesso). *L'applicazione* [7.1] *definisce una* struttura di spazio affine *sull'insieme* **A**.

Prendendo $P = Q = R$ nell'assioma SA2 abbiamo che $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$ per ogni $P \in \mathbf{A}$. Prendendo invece $R = P$ troviamo $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ per ogni $P, Q \in \mathbf{A}$.

Similmente a quanto accade per gli spazi vettoriali, su un insieme non vuoto **A** possono esistere diverse strutture di spazio affine, cioè diversi modi di assegnare uno spazio vettoriale **V** e una applicazione $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ che soddisfa SA1 e SA2.

Nel seguito *considereremo esclusivamente spazi affini tali che lo spazio vettoriale associato* **V** *abbia dimensione finita.*

La dimensione di **V** è detta *dimensione dello spazio affine* **A**, ed è denotata con dim(**A**).

Uno spazio affine di dimensione 1 (dimensione 2) viene comunemente chiamato *retta affine* (*piano affine*).