I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 novembre 2007 — Traccia I

COGNOME ____________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \frac{(a-1)(b-1)}{2} + 1$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{Q}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - z = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 0), (0, 2, 4, 4)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si determini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & k+2 & 2 & k \\ 1 & -1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e si forniscano esempi di spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 novembre 2007 — Traccia II

COGNOME ____________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali positivi si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \frac{ab}{3}$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + y = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((6, -6, 2, 1), (-3, 3, 3, 1), (4, 2, 5, 2)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di base ordinata e di componenti di un vettore rispetto la stessa. Si forniscano alcuni esempi.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 novembre 2007 — Traccia III

COGNOME ____________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \sqrt[5]{a^5 + b^5}$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + t = 0, z + t = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 0, 1, 0), (2, 2, -2, 4), (-2, -3, 0, 2)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1-k \\ k & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k & -k \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di campo e si forniscano esempi di campi finiti.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 26 novembre 2007 — Traccia IV

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali positivi si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \frac{ab}{2}$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, y - z = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, -1, -1, 0), (2, -2, -2, 4), (0, 0, 0, 1)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si verifichi che $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & -k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si definisca l'insieme $\mathbf{Z}_n$ delle classi di congruenza modulo n e si scriva inoltre la tabella della moltiplicazione in $\mathbf{Z}_5$.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 26 novembre 2007 — Traccia V

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \frac{(a-2)(b-2)}{2} + 2$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - y = 0, y - z = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 1, 1, 0), (2, -2, 2, 4), (0, 0, 0, 1)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & k & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di relazione di congruenza modulo n e si dimostri che essa è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri relativi.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 novembre 2007 — Traccia VI

COGNOME ____________________ NOME ______________________________________

1 Si dimostri che l'insieme dei numeri razionali del tipo 3^m, dove m è un intero, è un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{Q}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - y = 0, t = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 0, 1, 0), (2, 2, 1, 4), (1, 1, 0, 2)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2k & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si definisca l'insieme $\mathbf{Z}_n$ delle classi di congruenza modulo n e si scriva inoltre la tabella dell'addizione in $\mathbf{Z}_4$.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 novembre 2007 — Traccia VII

COGNOME ____________________ NOME ______________________________________

1 Si dimostri che l'insieme dei numeri reali del tipo 2^n, dove n è un razionale, è un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - t = 0, y - 2t = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 4), (0, 1, 0, 2)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 1 \\ 2k & 2 & -2 & -1 \\ k+2 & 2 & 2-k & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale e se ne enuncino alcune proprietà.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 26 novembre 2007 — Traccia VIII

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme **R** dei numeri reali si consideri la seguente operazione

$$a \odot b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

2 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{Q}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - t = 0\};$$

$$\mathcal{K} = L((1, 0, 0, 1), (2, 0, 4, 2), (0, 1, 2, 0)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) si verifichi che $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

3 Si determinini, al variare del parametro reale k, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} k & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2k & 2 & -2 & -k \\ k & 2-k & 2-k & 0 \end{pmatrix}$$

Argomento teorico

- Si dia la definizione di matrice invertibile e se ne enunci qualche proprietà.