Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia I

COGNOME ______________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) : x+3y=0, y-z=0\}; \mathcal{K} = \{(x,y,z,t) : y+z=0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y-z & 2z \\ x-y & y \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1,0,0), \mathbf{e_2} = (0,1,0), \mathbf{e_3} = (0,0,1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} hx_1 & & & +hx_4 & = & h-1 \\ & x_2 & & +hx_4 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & & = & h \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano per il punto $A(1,1,1)$ e contenente la retta r.

(b) Determinare i punti della retta $s : x+y = x-z = 0$ che hanno distanza $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$ dalla retta r.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale e si dimostri che l'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ é a sua volta un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.
- Si diano le definizioni di autovalore, di autovettore e di autospazio di una matrice quadrata.
- Si scriva la definizione di prodotto scalare e si dimostri la disuguaglianza di Schwarz.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ____

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) : x+z=0\}; \mathcal{K} = \{(x,y,z,t) : x+t=0, y-z=0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z & x+2z \\ 3y-3z & 2x+4z \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1,0,0), \mathbf{e_2} = (0,1,0), \mathbf{e_3} = (0,0,1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{ \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x_1 & & & +hx_4 & = & h-2 \\ & x_2 & & +hx_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & +hx_3 & & = & 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} x-2z-4=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano π contenente la retta r e perpendicolare al piano $z=0$.

(b) Calcolare la distanza tra π e l'asse z: $x=y=0$.

Argomenti teorici

- Si diano le definizioni di base ordinata di uno spazio vettoriale e di n-upla delle componenti di un vettore rispetto ad una base ordinata di uno spazio vettoriale n-dimensionale.
- Si dia la definizione di sistema lineare di Cramer e se ne descriva un metodo di risoluzione.
- Si scriva la definizione di distanza di un punto da una retta nel piano euclideo e si ricavi una formula che consenta di calcolarla.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia III

COGNOME ____________________ NOME ____________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + 3y + t = 0, y - z = 0\}; \mathcal{K} = \{(x, y, z, t) : x + z + t = 0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - z & 2x - 2z \\ y + z & 3y + 3z \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0), \mathbf{e_3} = (0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{ \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 2hx_1 & & & -hx_4 & = & h - 3 \\ & x_2 & & +3hx_4 & = & 0 \\ x_1 & & +x_3 & & = & h^2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano per il punto $A(1, 0, 1)$ e contenente la retta r.

(b) Determinare i punti della retta $s : 2x + y + z = 2x - y - 3z = 0$ che hanno distanza $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$ dalla retta r.

Argomenti teorici

- Si scriva la definizione di matrice invertibile e si descriva un metodo per calcolare la matrice inversa di una matrice invertibile mediante un esempio.
- Si dia la definizione di sottospazi affini paralleli e si si stabilisca la condizione analitica di parallelismo tra due rette in un piano affine.
- Si dia la definizione di base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo reale e si illustri il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia IV

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : y + z = 0\}; \mathcal{K} = \{(x, y, z, t) : 2x - t = 0, y + z - 2t = 0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - z & 3z \\ y - z & x - y \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0), \mathbf{e_3} = (0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{ \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x_1 & & +hx_3 & & = & h^2 - 5 \\ & x_2 & & +hx_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & +hx_3 & +hx_4 & = & 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano π contenente la retta r e perpendicolare al piano $x = 0$.

(b) Calcolare la distanza tra π e l'asse x: $y = z = 0$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che la relazione di similitudine nell'insieme delle matrici $\mathbf{R}^{2,2}$ è di equivalenza.
- Si dia la definizione di spazio affine e se ne fornisca qualche esempio.
- Si dia la definizione di sfera di uno spazio euclideo tridimensionale e si determini l'equazione cartesiana di una sfera di cui sono noti il centro e il raggio.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia V

COGNOME ____________ NOME ____________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - t = 0\}; \mathcal{K} = \{(x, y, z, t) : 2z - t = 0, y - 2t = 0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z & 2x - 2z \\ y + z & 3z \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0), \mathbf{e_3} = (0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{ \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 3x_1 & & +hx_3 & & = & h - 7 \\ & x_2 & & +hx_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & +h^2x_3 & +hx_4 & = & 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano per il punto $A(0, -2, 1)$ e contenente la retta r.

(b) Determinare i punti sulla retta $s : 2x + y - z = x - z = 0$ che hanno distanza $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$ dalla retta r.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di vettori linearmente dipendenti e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si scriva la definizione di applicazione lineare e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si scrivano le formule di trasformazione delle coordinate in un cambiamento di riferimento di un piano affine.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 22 Febbraio 2008 — Traccia VI

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - t = 0, y + 2z - t = 0\}; \mathcal{K} = \{(x, y, z, t) : 2z - t = 0\}$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

(b) Si completi la base trovata di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ fino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & z \\ y + z & 2y + 2z \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0), \mathbf{e_3} = (0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e la base

$$\mathfrak{C} = \left\{ \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{R}^{2,2}$

(b) Stabilire se f é iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x_2 + hx_4 = h^2 \\ x_1 + hx_3 = h - 9 \\ 2x_1 + hx_3 + hx_4 = 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Data la retta

$$r : \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases},$$

(a) scrivere l'equazione del piano π contenente la retta r e perpendicolare al piano $y = 0$.

(b) Calcolare la distanza tra π e l'asse y: $x = z = 0$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di prodotto righe per colonne tra matrici e se enunci qualche proprietà.
- Si dimostri che in uno spazio vettoriale euclideo reale n vettori non nulli a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti.
- Si scrivano le diverse rappresentazioni di un piano in uno spazio affine tridimensionale.