Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 6 Maggio 2008 — Traccia I

COGNOME ____________________ NOME ____________________________________

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) : x+y=0, x-2y-z=0\}; \mathcal{K} = \{(x,y,z,t) : 2x-y-z=0, x+t=0\}.$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ e, eventualmente, la si completi sino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare così definita $f(x,y,z) = (2x-y, x+y+z, y-z)$.

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(b) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} (h-1)x & +2y & & = h+5 \\ 2x & +y & +hz & = 0 \\ x & & -z & = 0 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $O(0,0,0)$, parellela al piano $\pi : x+y=3$ e incidente la retta

$$m : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3+t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

(b) Determinare i punti della retta s a distanza 2 da m.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di riferimento affine e di coordinate affini di un punto in uno spazio affine.
- Si discuta la posizione reciproca di due rette nello spazio euclideo reale.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 6 Maggio 2008 — Traccia II

COGNOME ____________________ NOME ________________________________

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = Ł((0,1,-1,0),(1,0,2,1),(1,1,1,1)), \mathcal{K} = Ł(((1,-1,3,1),(0,0,1,1),(1,2,0,1)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la si completi a base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{Q}^3 \mapsto \mathbf{Q}^3$ l'applicazione lineare così definita $f(x,y,z) = (x-y, x+y, z-x)$.

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{Q}^3$;

(b) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +(h+1)y & -z & = & 0 \\ 2x & +y & & = & 2h+1 \\ 3x & +2hy & -3z & = 0 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $O(0,0,0)$ e incidente ortogonalmente la retta

$$m : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

(b) Determinare la distanza del punto $B(1,0,1)$ dalla retta m.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di V.
- Si dia la definizione di norma o modulo di un vettore di uno spazio vettoriale euclideo reale e se ne enuncino alcune proprietà.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________ — 6 Maggio 2008 — Traccia III

COGNOME ______________ NOME ______________

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) : x+y=0, x-y-z=0\}; \mathcal{K} = \{(x,y,z,t) : 2x-z=0, x+t=0\}.$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ e eventualmente, la si completi sino ad ottenere una base di $\mathbf{R}^4$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^4$ l'applicazione così definita $f(x,y,z) = (x-y, x+y, z-x, x-y-z)$.

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto le basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^4$.

(b) Stabilire se f è iniettiva.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +2hy & & = & 0 \\ x & -y & +hz & = & 0 \\ & y & +z & = & 3h+1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni del piano π parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1,1,-1)$ e contenente la retta

$$m : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3+2t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

(b) Determinare i punti su m a distanza $2\sqrt{2}$ da $O(0,0,0)$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale e si forniscano esempi di sottospazi vettoriali di un qualsiasi spazio vettoriale.
- Si diano le definizioni di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore di una matrice quadrata. Che relazione intercorre tra le due molteplicità?
- Si dia la definizione di distanza tra due punti di un spazio euclideo tridimensionale e si determini il luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi di un segmento assegnato.