Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia I

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, x - 2y - z = 0\}; \mathcal{K} = Ł((1, 2, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 2, 0)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

2 Sia $f : \mathbf{Q}^3 \mapsto \mathbf{Q}^3$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (x + z, x - y, x + 2y + z)$.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{Q}^3$;

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 2x & -y & +hz & = & h+2 \\ 2x & -hy & +z & = & 3 \\ x & & -hz & = & 3h+1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 1, 0)$ ortogonale al vettore $\mathbf{u}= (1, 1, -1)$ e incidente la retta

$$m : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \quad , t \in \mathbf{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

(b) Determinare la distanza del punto $B(1, 1, 1)$ dalla retta m.

Argomenti teorici

- Si enunci il teorema della base incompleta e se ne mostri un'applicazione completando l'insieme $\{(1, 0, 3)\}$ ad una base di $\mathbf{R}^3$.
- Si diano le definizioni di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore di una matrice quadrata. Che relazione intercorre tra le due molteplicità?
- Si dia la definizione di distanza tra due punti di un spazio euclideo tridimensionale e si determini il luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi di un segmento assegnato.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) : x-y=0, x+y-z=0, 2x-z=0\}; \mathcal{K} = \text{Ł}((1,2,0,0),(0,1,-1,0),(1,3,0,0)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

2 Sia $f : \mathbf{Q}^3 \mapsto \mathbf{Q}^3$ l'applicazione così definita $f(x,y,z) = (x-2z, x+y, 2x+y-2z)$.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{Q}^3$ e stabilire se A è invertibile; nel caso, determinarne l'inversa.

(c) Determinare la dimensione del ker di f.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +3y & +hz & = & h-2 \\ 2x & (1-h)y & +z & = & -2 \\ x & & +3z & = & 2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si verifichi che le due rette

$$m : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3+t \\ z = 1-2t \end{cases}, \qquad n : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe e si calcoli la distanza fra di esse.

(b) Determinare la retta di minima distanza fra m e n.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale e si dimostri che due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.
- Si dimostri che un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ è iniettiva se e solamente se il suo nucleo si riduce al solo vettore nullo di V.
- Si scriva la definizione di piani perpendicolari in uno spazio euclideo tridimensionale si determini la condizione analitica di perperpendicolaritá tra due piani.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia III

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x + y + z = 0, t - x = 0\}; \mathcal{K} = \text{Ł}((1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0), (1, 3, -3, 1)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (x - 2z, x - y, y - z)$.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +(h-1)y & -z & = & h+1 \\ & -hy & +z & = & -2 \\ x & -2y & +hz & = & h^2 - 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini la retta ℓ contenuta nel piano $\pi : 2x + y - z = 2$, passante per il punto $P(1, 1, 1)$ e incidente la retta

$$m : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

(b) Determinare il piano passante per la retta m e il punto $Q(0, 1, 1)$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di rango di una matrice; si enunci il teorema degli orlati e se ne fornisca un esempio di applicazione.
- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- Si discuta la posizione reciproca di due piani in uno affine tridimensionale.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia IV

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0, \}; \mathcal{K} = \text{Ł}((1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 0)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

2 Sull'insieme $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{Z}$ si consideri l'operazione

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, b + d - 3)$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 2x & +(h-2)y & +2z & = & h+6 \\ x & -hy & +z & = & 3 \\ & 2y & +hz & = & 0 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini l'equazione del piano passante per il punto $P(1, 1, 1)$, perpendicolare al piano $x + 3y - 2z + 1 = 0$ e parallelo alla retta

$$m : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} .$$

(b) Determinare la distanza del punto $Q(-1, 0, 1)$ da m.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e si forniscano degli esempi di insiemi di generatori per $\mathbf{R}^4$ che non sono basi.
- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno gli stessi autovalori.
- Si diano le definizioni di fascio proprio e di fascio improprio di rette in un piano affine e se ne forniscano degli esempi.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia V

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) : x - y = 0, 2z - t = 0\}; \mathcal{K} = \mathrm{Ł}((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 2, -3, -3)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{H}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

2 Sull'insieme $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$ si consideri l'operazione

$$(a, b) \odot (c, d) = (3ac, b + d - 1)$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +(h-1)y & & = & -h \\ 2x & +hy & & = & 2 \\ & y & +(h+1)z & = & 0 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini la posizione reciproca delle rette

$$m : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \qquad n : \begin{cases} 2x - z = 3 \\ 4x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$$

(b) Qualora le due rette m e n siano sghembe, si determini la retta di minima distanza fra di esse; in caso contrario, si determini un piano che le contenga entrambe.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e si dimostri che $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
- Sia discuta la posizione reciproca di due rette in un piano affine.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia VI

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, 3x, z, 2t + z) : x, z, t \in \mathbf{R}\}; \mathcal{K} = \mathcal{L}((1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 2)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

2 Sull'insieme $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ si consideri l'operazione

$$(a, b) \odot (c, d) = (a + c + 2, \sqrt[3]{b^3 + d^3})$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} (h+3)x & +y & & = & h+5 \\ x & +(h-1)y & +z & = & h \\ x & +2y & +z & = & 3 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini la retta passante per il punto $T(1, -1, 2)$ e parallela alla retta

$$n : \begin{cases} 3x - z = 1 \\ 4x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$$

(b) Si determinino gli eventuali punti su r a distanza a distanza $2\sqrt{2}$ dal piano $\pi : x + y + 3z = 0$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di campo, se ne enuncino le principali proprietà e si forniscano alcuni esempi.
- Si dia la definizione di autospazio di una matrice quadrata di ordine n su di un campo $\mathbf{K}$ e si dimostri che esso è un sottospazio di $\mathbf{K}^{n,1}$.
- Si dia la definizione di riferimento affine e di coordinate affini di un punto in uno spazio affine.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia VII

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, 3x, z, 2t + z) : x, z, t \in \mathbf{R}\}; \mathcal{K} = \{(x, y, z, t) : x + t = 0, y - z = 0\}.$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$.

2 Sull'insieme $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Q} \setminus \{0\})$ si consideri l'operazione

$$(a, b) \odot (c, d) = (a + c, 3bd)$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = & h-3 \\ & (h-6)y & +2z & = & h \\ 2hx & -y & & = & -3 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini il piano passante per il punto $T(1, -1, 2)$, perpendicolare al piano $x + 2y - z = 0$ e parallelo alla retta

$$n : \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

(b) Si determinino gli eventuali punti su n a distanza $\sqrt{14}$ dal piano $\pi : x + 2y + 3z = 4$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di determinante di una matrice quadrata e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di parametri direttori di una retta e si scriva un modo per calcolarli nel piano o nello spazio affine tridimensionale.
- Si dia la definizione di base ortogonale di uno spazio vettoriale e di riferimento cartesiano di uno spazio euclideo.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 4 Febbraio 2008 — Traccia VIII

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{H} = L((1,1,0,1),(0,1,-2,1),(2,1,2,1)); \mathcal{K} = L((1,0,2,0),(1,2,3,0),(0,2,1,0)).$$

(a) Si calcolino la dimensione e una base di $\mathcal{K}$;

(b) Si determini una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e la dimensione di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

2 Sull'insieme $\mathbf{Q} \setminus \{3\}$ si consideri l'operazione

$$a \odot b = \frac{(a-3)(b-3)}{3} + 3$$

e si provi che essa definisce un gruppo abeliano.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 3x & +(h+1)y & +z & = & h^2+1 \\ (h-1)x & & +z & = & 9 \\ 2(h-1)y & +z & & = & h+8 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi razionali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Si determini la retta ℓ passante per il punto $T(1,0,0)$ e parallela al vettore $\mathbf{n} = (1,0,1) \wedge (0,1,-1)$.

(b) Si determini il piano contenente ℓ e perpendicolare al piano $3x + 2y - z = 0$.

Argomenti teorici

- Si scrivano le definizioni di rango di una matrice e di orlato di un suo minore; si enunci il teorema degli orlati. Si fornisca almeno un esempio di matrice reale di tipo 3×5 avente rango 2.
- Si scriva la definizione di prodotto scalare e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di retta e piano paralleli e si determini una condizione algebrica per stabilire se una retta e un piano sono paralleli.