Relazioni ricorsive

20 Ottobre 2003

Relazioni ricorsive

$n \mapsto a_n$ successione (a valori in $\mathbb{R}$)

Relazione ricorsiva:

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0$$

k: ordine di F

F lineare in a_j $\Rightarrow$ ricorrenza lineare

Numeri di Fibonacci

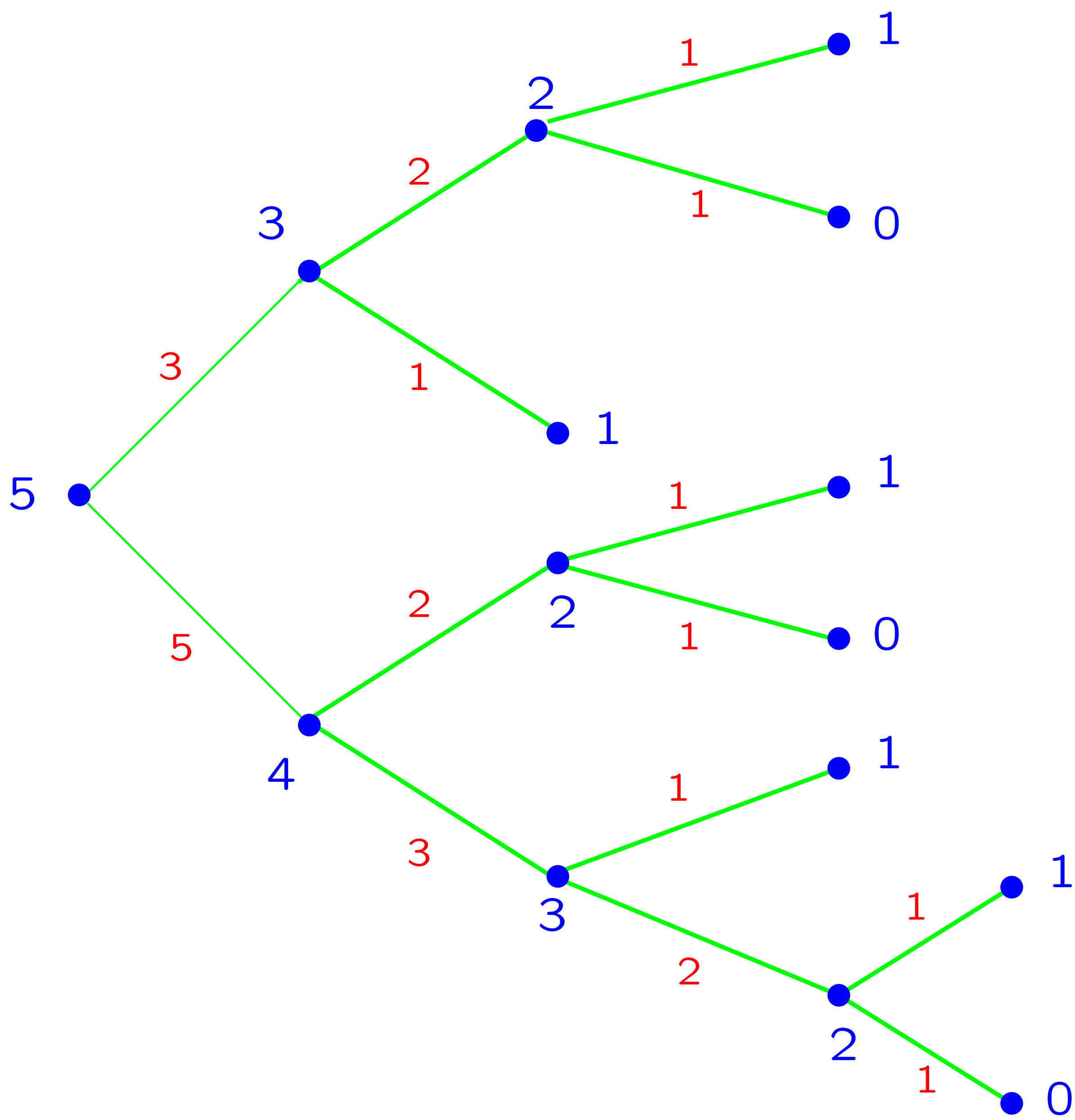
$$\boxed{\begin{array}{c} a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{array}}$$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55\ldots$

Algoritmo di calcolo (elementare)

```
(defun fib0 (x)
  (if (< x 2)
   1
   (+ (fib0 (- x 1))(fib0 (- x 2)))))
)
```

Numeri di Fibonacci/2



Numeri di Fibonacci/3

Algoritmo ricorsivo (con memoria)

```
(defun fib1 (x &optional (com '(1 1)))
  (if (<= (length com) x)
   (fib1 x (append
    (list (+ (car com) (cadr com)))
    com))
   (car com))
)
```

Risultati esecuzione

```
1. Trace: (FIB1 '5)
2. Trace: (FIB1 '5 '(2 1 1))
3. Trace: (FIB1 '5 '(3 2 1 1))
4. Trace: (FIB1 '5 '(5 3 2 1 1))
5. Trace: (FIB1 '5 '(8 5 3 2 1 1))
5. Trace: FIB1 ==> 8
4. Trace: FIB1 ==> 8
3. Trace: FIB1 ==> 8
2. Trace: FIB1 ==> 8
1. Trace: FIB1 ==> 8
```

Coefficienti binomiali

Definizione ricorsiva:

a. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

b. $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Forma chiusa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ricorrenze lineari a coefficienti costanti

$$s_0 a_{n+k} + s_1 a_{n+k-1} + \ldots + s_k a_n = f(n)$$

Soluzione:

soluzione particolare

$+$

soluzione problema omogeneo

Ricorrenze (lineari, a coeff. costanti) omogenee/1

$$(\star)\ s_0 a_{n+k} + s_1 a_{n+k-1} + \ldots + s_k a_n = 0$$

Th: Le soluzioni di $(\star)$ formano uno spazio vettoriale (reale) di dimensione k

Dim:

a. a_n, b_n: soluzioni di $(\star)$

b. $0 = \lambda(s_0 a_{n+k} + \ldots + s_k a_n) + \mu(s_0 b_{n+k} + \ldots + s_k b_n)$

c. $s_0(\lambda a_{n+k} + \mu b_{n+k}) + \ldots + s_k(\lambda a_n + \mu b_n) = 0$

d. esiste una combinazione lineare t a coefficienti non tutti 0 di $k+1$ soluzioni tale che $t = 0$ $(t_{n+k} = \ldots = t_n = 0)$

Ricorrenze (lineari, a coeff. costanti) omogenee/2

$F : s_0 a_{n+k} + \ldots + s_k a_n = 0$

Polinomio caratteristico:

$$\chi_F(\lambda) := s_0 \lambda^k + \ldots + s_{k+1}\lambda + s_k$$

Th: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$: radici distinte di $\chi_F(\lambda)$
$m_1, \ldots, m_s$: molteplicità di $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$

ALLORA

$$a_n = \sum_{j=1}^{s} (b_{j1} + b_{j2} n + \ldots + b_{jm_j} n^{m_j - 1}) \lambda_j^n$$

Ricorrenze (lineari, a coeff. costanti) omogenee/3

Dim: Cercare k soluzioni linearmente indipendenti

- $\lambda_i \neq \lambda_j$

  a. $a_n = \lambda_i^n$

  b.
  $$\begin{aligned} & s_0 a_{n+k} + s_1 a_{n+k-1} + \ldots + s_k a_k = \\ & = s_0 \lambda_i^{n+k} + s_1 \lambda_i^{n+k-1} + \ldots + sk \lambda_i^k = \\ & = \lambda^k \left(s_0 \lambda_i^n + s_1 \lambda_i^{n-1} + \ldots + sk \right) = 0 \end{aligned}$$

  c. $i \neq j \quad \Rightarrow \quad \lambda_i, \lambda_j$ linearmente indipendenti

Ricorrenze (lineari, a coeff. costanti) omogenee/4

Dim/2:

- $m_i > 1$:

  a. $\chi_F(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} q(x)$

  b. $\phi_n^r = n^r \lambda_i^n \quad 0 \leq r \leq m_i - 1$

  c. $F(\phi_n^r) = \lambda_i^n (s_0 (n+k)^r \lambda_i^k + \ldots + s_k n)$

  d.

$$\begin{cases} \chi_F^{(0)}(x) = x^n \chi_F(x) \\ \chi_F^{(v+1)}(x) = x[\chi_F^{(v)}(x)'] \end{cases}$$

  e. $\chi_F^{(r)}(\lambda_i) = F(\phi_n^r)$

  f. $(\lambda - \lambda_i)^{m_i} \mid \chi_F^{(0)}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \lambda_i) \mid \chi_F^{(r)}$ se $r < m_i$

  g. $F(\phi_n^r) = 0$

$\square$

Numeri di Fibonacci/4

Relazione ricorsiva:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

Polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Radici:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Spazio delle soluzioni:

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Condizioni iniziali: $a_0 = a_1 = 1$

$$c_1 + c_2 = 1, \quad (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\sqrt{5} = 2$$

$$c_1 = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{5}} \qquad c_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$$

Numeri di Fibonacci/5

Forma chiusa

```
(defun fib2 (n)
 (+
  (* (/ (+ 5 (sqrt 5)) 10)
   (expt (/ (+ 1 (sqrt 5)) 2) n))
  (* (/ (- 5 (sqrt 5)) 10)
   (expt (/ (- 1 (sqrt 5)) 2) n))
))
```

Risultati esecuzione

```
(map-fn 'list #'fib2
 (scan-range :upto 20))

Z#(1.0 0.99999994 2.0 3.0 5.0 8.0 13.000002
  21.000002 34.000004 55.000008 89.00002
  144.00003 233.00005 377.00012 610.0001
  987.0003 1597.0005 2584.0007 4181.0015
  6765.0024 10946.004)
```

Esempio di ricorrenza

Relazione ricorsiva:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$$

Polinomio caratteristico:

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Radici:

$$\lambda = 3 \quad \text{(doppia)}$$

Spazio delle soluzioni:

$$a_n = (c_1 + c_2 n)3^n$$

Condizioni iniziali: $a_0 = 0, a_1 = 1$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = \frac{1}{3}$$

Funzioni generatrici

$n \mapsto a_n$ successione (a valori in $\mathbb{R}$)

Funzione generatrice per a_n

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Talvolta è facile trovare una forma chiusa per la funzione generatrice

Funzioni generatrici/2

Successione	Funzione generatrice	Forma chiusa
$(1,0,0,0,\ldots)$	$\sum [n=0]z^n$	1
$(1,1,1,1,\ldots)$	$\sum z^n$	$1/(1-z)$
$(1,-1,1,-1,\ldots)$	$\sum(-1)z^n$	$1/(1+z)$
$(1,0,1,0,\ldots)$	$\sum [2\backslash n]z^n$	$1/(1-z^2)$
$(1,2,3,4,5,\ldots)$	$\sum (n+1)z^n$	$1/(1-z)^2$
$(1,c,c^2,c^3,\ldots)$	$\sum c^n z^n$	$1/(1-cz)$
$(1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\ldots)$	$\sum \binom{c}{n} z^n$	$(1+z)^c$
$(1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\ldots)$	$\sum \binom{m+n}{m} z^n$	$1/(1-z)^{m+1}$
$(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots)$	$\sum \frac{1}{n} z^n$	$-\ln(1-z)$
$(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots)$	$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$\ln(1+z)$
$(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\ldots)$	$\sum \frac{1}{n!} z^n$	e^z

Tutte le somme devono essere intese per $n \geq 0$

La funzione generatrice deve chiaramente essere intesa definita per valori di z per cui la serie converge (per $z=0$ non ci sono problemi; $|z|<r$ ove r è il raggio di convergenza). È però solitamente possibile prolungare analiticamente tali funzione a tutto il campo $\mathbb{C}$

Funzioni generatrici/3

Manipolazione di funzioni generatrici		
$\alpha F(z)+\beta G(z)$	$=$	$\sum(\alpha f_n+\beta g_n)z^n$
$z^m G(z)$	$=$	$\sum g_{n-m}z^n$
$\frac{G(z)-g_0-g_1z-\cdots-g_{m-1}z^{m-1}}{z^m}$	$=$	$\sum g_{n+m}z^n$
$G(cz)$	$=$	$\sum c^n g_n z^n$
$G'(z)$	$=$	$\sum(n+1)g_{n+1}z^n$
$zG'(z)$	$=$	$\sum_{n\geq 1} n g_n z^n$
$\int_0^z G(t)dt$	$=$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}g_{n-1}z^n$
$F(z)G(z)$	$=$	$\sum_n\sum_k f_k g_{n-k}z^n$
$\frac{1}{1-z}G(z)$	$=$	$\sum_n\sum_{k\leq n} g_k z^n$

Tutte le somme, ove non altrimenti indicato,
devono essere intese per $n \geq 0$

Numeri di Fibonacci/6

Relazione ricorsiva Incluse condizioni iniziali

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + [n = 0]$$

Funzione generatrice

$$G(z) = \sum_n a_n z^n = \sum_n a_{n-1} z^n + \sum_n a_{n-2} z^n + 1 =$$
$$= \sum_n a_n z^{n+1} + \sum_n a_n z^{n+2} + 1 =$$
$$= zG(z) + z^2 G(z) + 1$$

ALLORA

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}}$$

Espansione in serie di $G(z)$

$$G(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + \dots$$

Problema:

Determinare una forma chiusa per i coefficienti di $G(z)$

Funzioni razionali

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$: funzione razionale

Th: Esistono un polinomio $T(z)$ e una funzione

$$S(z) = \frac{a_1}{(1-\rho_1 z)^{m_1+1}} + \frac{a_2}{(1-\rho_2 z)^{m_2+1}} + \\ + \cdots + \frac{a_l}{(1-\rho_l z)^{m_l+1}}$$

con $1/\rho_i$ radice di $Q(z)$ di molteplicità m_i

tali che

$$R(z) = S(z) + T(z)$$

Numeri di Fibonacci/7

$$G(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{\alpha}{1-z/\rho_1} + \frac{\beta}{1-z/\rho_2}$$

$$\boxed{G(z) = \alpha \sum \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^n z^n + \beta \sum \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^n z^n}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+5}{10}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-5}{10}$$

$$\boxed{F_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n}$$

$\square$

Funzioni generatrici/4

$F : s_0 a_{n+k} + \ldots + s_k a_n + [n = 0] = 0$

$\psi_F(z) = z^k \chi_F(1/z)$

Osservazione $(\lambda \neq 0)$

$$\chi_F(\lambda) = 0 \iff \psi_F(1/\lambda) = 0$$

Funzione generatrice

$$G(z) = \frac{-1}{\psi_F(z)}$$

Numeri di Bell

$$b_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k} b_{n-k}$$

$G(z) := \sum b_n z^n / n!$ Funzione generatrice esponenziale

Osserviamo:

$$G'(z) = \sum (n+1) b_{n+1} z^n / (n+1)! =$$

$$\sum \sum_k \binom{n}{k} b_{n-k} z^n / n! =$$

$$\sum \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} b_{n-k} z^n / n! =$$

$$\sum \sum \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} z^n / k! = e^z G(z)$$

ALLORA

$$G(z) = e^{-z} G'(z) \qquad G(0) = 1$$

Soluzione:

$$G(z) = e^{e^z - 1}$$