Principio di induzione e applicazioni

13 Ottobre 2003

Principio di Induzione/1

P_n = proposizione che dipende da parametro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se:

- P_1 è vera;
- $\boxed{\forall n > 1 : P_{n-1} \Rightarrow P_n}$

ALLORA

$\forall n : P_n$ è vera

Esempio di induzione

Th: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2.$

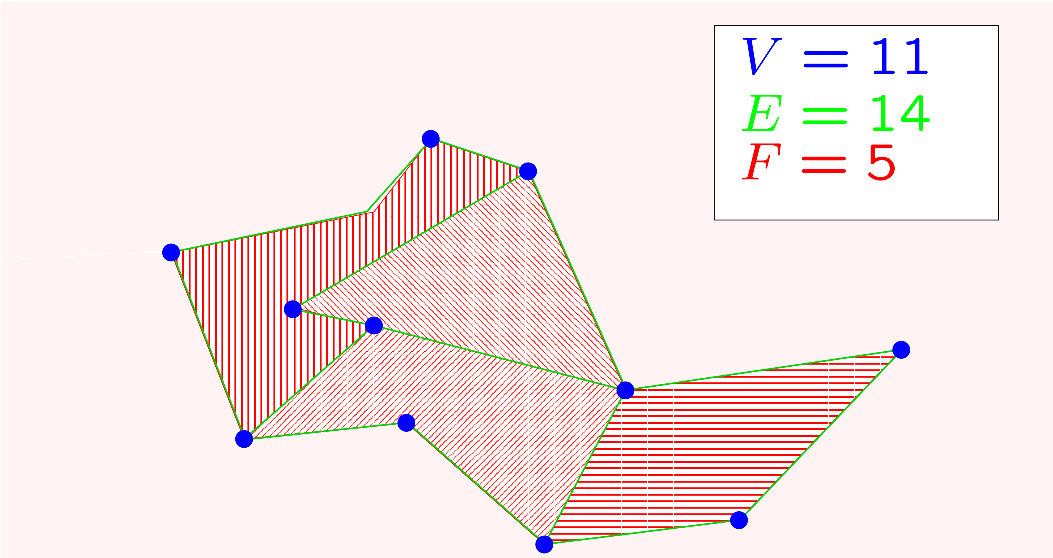
Dim: INDUZIONE su k

- $k=1$: $1=1^2$
- $k\Rightarrow k+1$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=\\
&(2k-1)+\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)=\\
&(2k-1)+(k-1)^2=\\
&k^2-2k+1+(2k-1)=k^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Mappe connesse



V = numero di vertici;

E = numero di lati (edges)

F = numero di facce.

TEOREMA:

$$V + F = E + 2.$$

Mappe/2: formula di Eulero

Th: $V + F = E + 2$

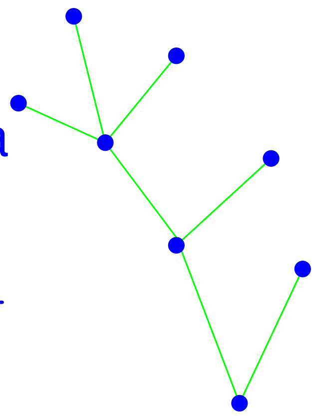
Dim: DOPPIA INDUZIONE

Su F:

$F = 1$ — Induzione su V:

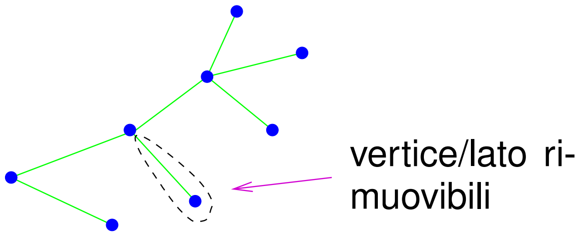
Un albero con V vertici possiede $E = V - 1$ lati.

- $V = 1$: BANALE
- $V \Rightarrow V + 1$:
  - Ogni albero con V vertici ha $V - 1$ lati
  - Sia T un albero con $V + 1$ vertici
  - esiste almeno un vertice x connesso ad un solo lato e [altrimenti esisterebbe un ciclo in T]
  - $T' = T \setminus \{x, e\}$ è un albero con V vertici.
  - $V_{T'} - 1 = E_{T'}$; $E_{T'} = E_T - 1$; $V_{T'} = V_T - 1$; ALLORA $V_T - 1 = E_T$.

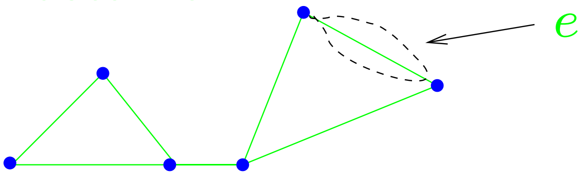


Mappe/3: formula di Eulero

- $F = 1$: $\quad V + 1 = E + 2$



- $F \Rightarrow F + 1$
  - ogni mappa piana M' con n facce ha $V_{M'}$ vertici e $E_{M'}$ lati con $V_{M'} + n = E_{M'} + 2$
  - esiste almeno una faccia f confinante con quella esterna [essa è un ciclo e rimuovere un lato non disconnette la mappa] Sia e un suo lato confinante con l'esterno



  - $M' = M \setminus e$ ha n facce
  - $V_{M'} + F_{M'} = E_{M'} + 2$; $V_M = V_{M'}$; $F_M = F_{M'} + 1$; $E_M = E_{M'} + 1$; ALLORA

$$V_M + F_M = E_M + 2$$

Principio di Induzione/2: Induzione forte

P_n = proposizione che dipende da parametro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se:

- P_1 è vera;
- $\boxed{\forall n > 1 : \ (\forall j < n : P_j) \Rightarrow P_n}$

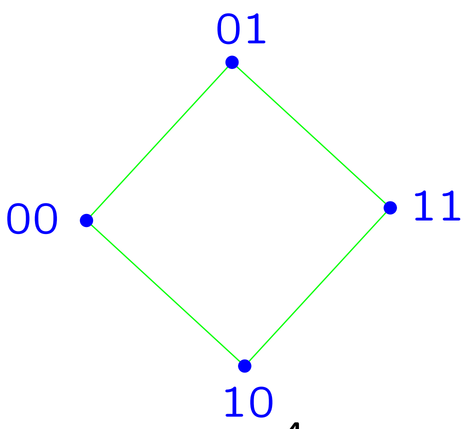
ALLORA

$\forall n : P_n$ è vera

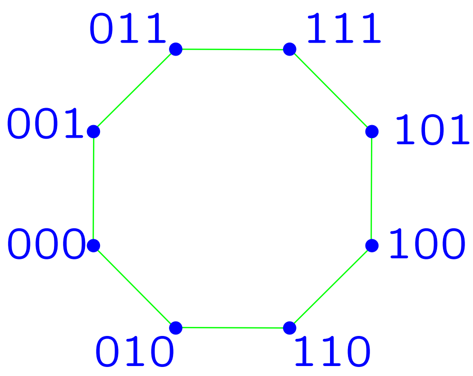
Codici di Gray/1

Problema:

> Date n stringhe binarie ognuna di lunghezza k, disporle in modo tale che ogni due stringhe consecutive differiscano esattamente in una posizione.



$n = 4$
$k = 2$



$n = 8$
$k = 3$

SE POSSIBILE: Codice di Gray

Codice

- *chiuso* se l'ultima stringa é adiacente alla prima
- *aperto* altrimenti

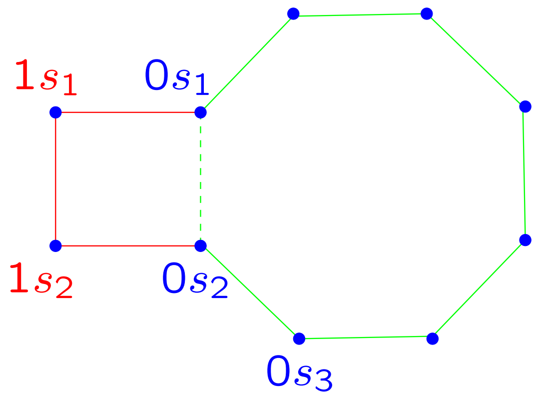
Codici di Gray/2

Th: Per ogni $k > 0$ esiste un codice di Gray di lunghezza k e contenente $2k$ parole.

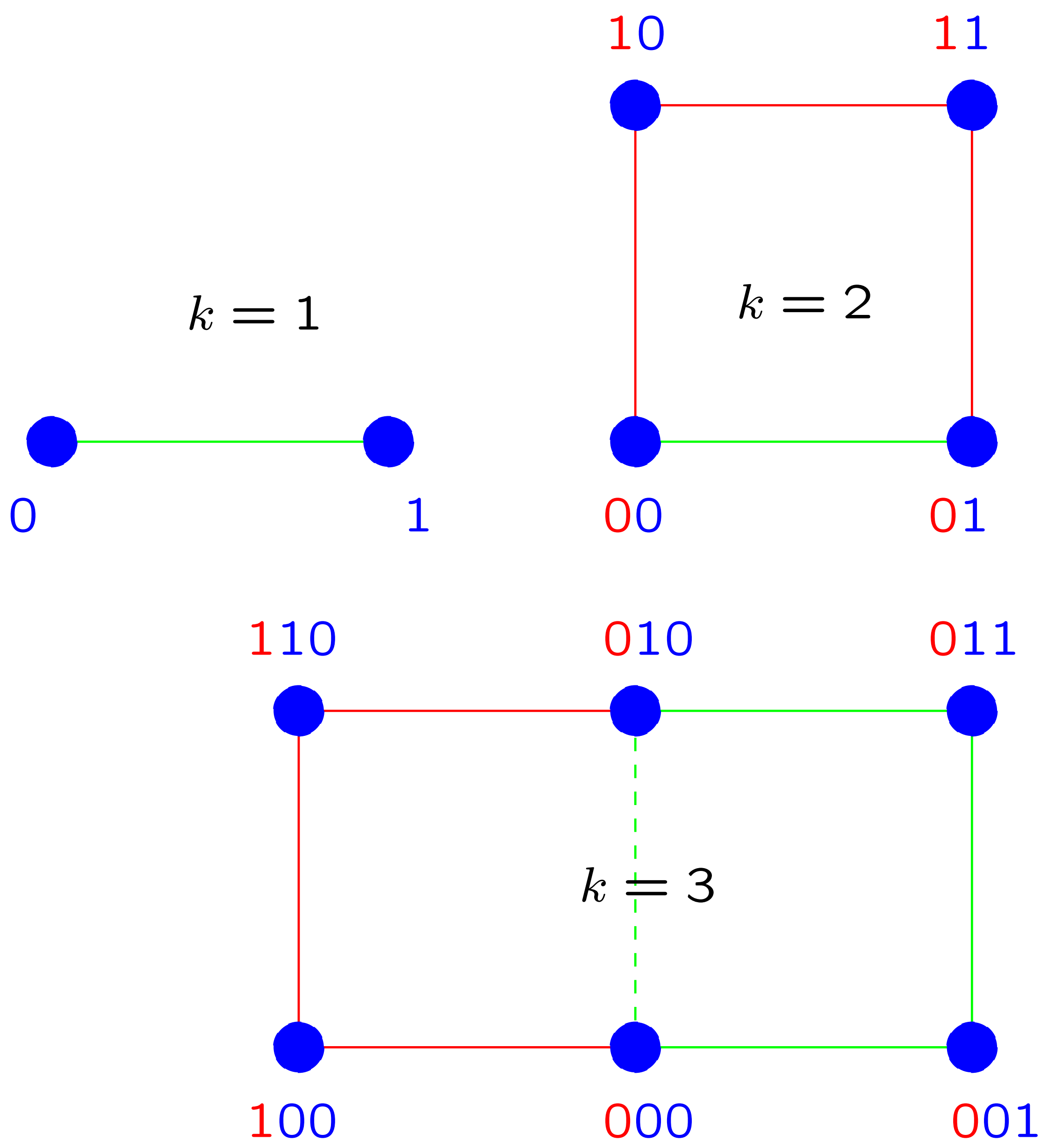
Dim: INDUZIONE su $2k$ = numero parole

- $k = 1$: BANALE
- $2k \Rightarrow 2(k+1)$:
  - Esiste un codice di Gray G' di lunghezza k contenente $2k$ parole.
  - Aggiungiamo 0 o 1 in testa a *tutte* le parole di G' in modo tale che

$$
\begin{aligned}
G' &= s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2k} \\
G &= 0s_1, 1s_1, 1s_2, 0s_2, 0s_3, \ldots, 0s_{2k}
\end{aligned}
$$



Codici di Gray/3

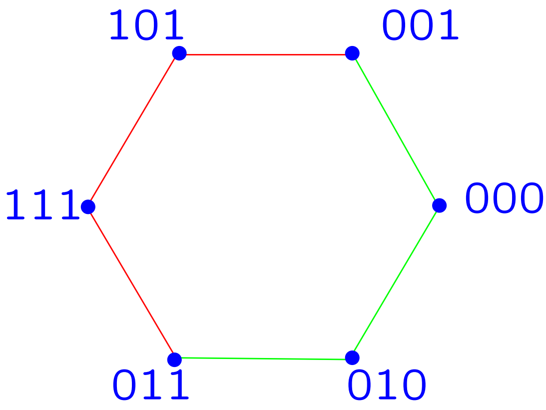


Il codice contenente n parole ha lunghezza k almeno pari a $n/2$.

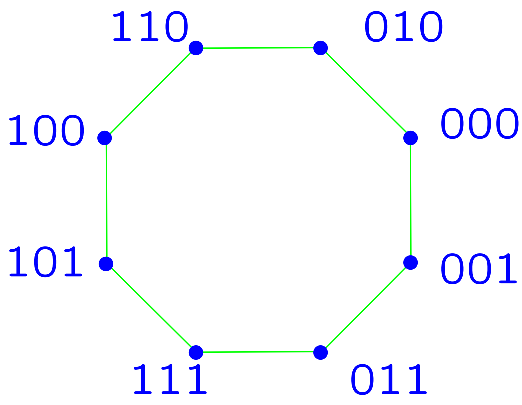
Si può fare di meglio?

Codici di Gray/4

OSSERVAZIONE:



$n = 6$
$k = 3$
teorema



$n = 8$
$k = 3$

Cerchiamo codici di Gray “piú compatti” (lunghezza logaritmica nel numero di parole).

Codici di Gray/5

Th:

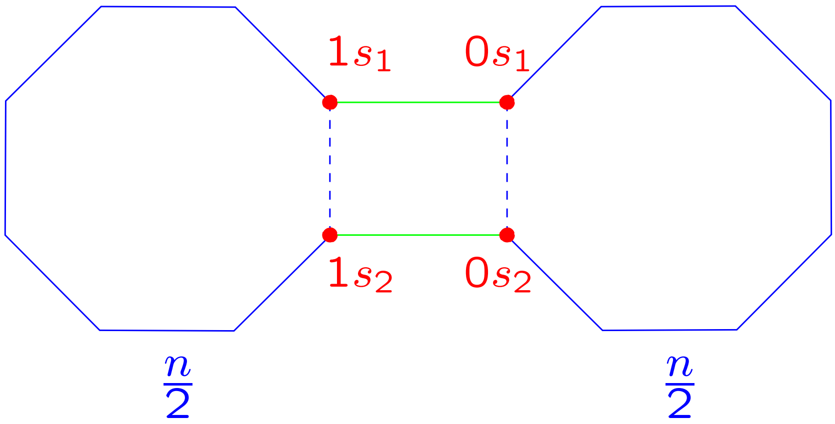
> Per ogni $n > 1$, esistono codici di Gray contenenti n parole e aventi lunghezza $\lceil \log_2 n \rceil$. Se n è pari, allora tali codici sono chiusi; altrimenti essi risultano aperti.

Dim: [Usiamo la forma forte del principio di induzione]

- Per $n = 2$ il teorema è verificato
- Esistono codici di Gray di lunghezza $\lceil \log_2 k \rceil$ per ogni $k < n$. Per i valori pari di k tali codici sono chiusi; per quelli dispari essi sono aperti.

Codici di Gray/6

- n pari: Uniamo 2 codici con $n/2$ parole.



$$\lceil \log_2(n/2) \rceil + 1 = \lceil \log_2(n) \rceil$$

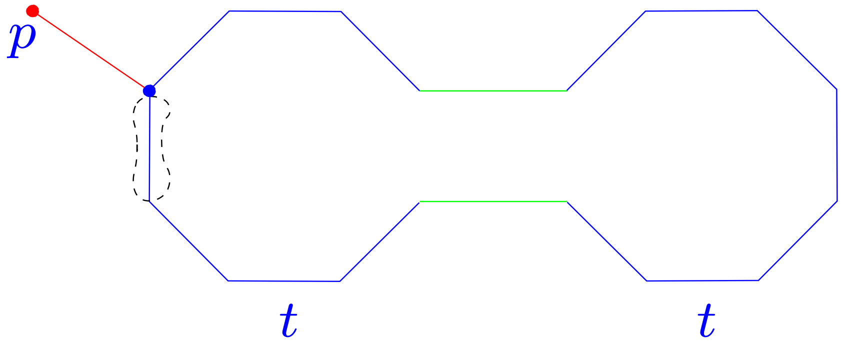
OSSERVAZIONE: Se $n/2$ è dispari, allora i codici vanno incollati sugli elementi ove essi si aprono (i.e. ultimo con ultimo e primo con primo oppure viceversa)

Codici di Gray/7

- n dispari: $n = 2t + 1$

  1. Uniamo due codici di t parole.
  2. Se t *non* è potenza di 2: esiste una parola p di lunghezza $\lceil \log_2(2t) \rceil$ adiacente al codice ma non contenuta in esso

     $\Rightarrow$ Apriamo il codice e aggiungiamo la parola

     Il codice ha lunghezza $\lceil \log_2(2t) \rceil$

  3. Se t è potenza di 2: tutte le parole di lunghezza $\lceil \log_2(2t) \rceil$ sono state usate

     $\Rightarrow$Aggiungiamo 1 bit al codice

     Il codice ha lunghezza

     $$\lceil \log_2(2t) \rceil + 1 = \log_2(2t) + 1 =$$

     $$\lceil \log_2(2t + 1) \rceil$$

$\square$

Codici di Gray/8

- $t \in \mathbb{N}$, t *non* potenza di 2
- G codice di Gray di lunghezza $[\log_2(2t)]$
- $d(p, G) = \min_{x \in G} d(p, x)$

ALLORA

$$\exists P : d(p, G) = 1.$$

Dim:

1. p_1 e p_2 stringhe qualsiasi
2. si può passare $p_1 \rightarrow p_2$ cambiando 1 bit per volta
3. se $\min_{p \notin G} d(p, G) > 1$, allora *tutte* le stringhe a distanza 1 da tutte le stringhe in G stanno in G.
4. costruiamo un percorso che vada da un qualsiasi elemento di G a p (tutto in G).
5. $p \in G$.

Principio di Induzione/3: Induzione inversa

P_n = proposizione che dipende da
parametro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se:

- P_n è vera per un numero *infinito* di interi
- $\boxed{\forall n > 1 : P_n \Rightarrow P_{n-1}}$

ALLORA

$\forall n : P_n$ è vera

Media aritmetica e geometrica/1

Th: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dim: [Usiamo l'induzione diretta e inversa]

Induzione diretta con $n = 2^k$

- $n = 2$ ovvero ($k = 1$): elevando al quadrato

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2$$

- $2^k \Rightarrow 2^{k+1}$ ovvero ($n \Rightarrow 2n$):

  a. $y_1 = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$

  b. $y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n})^{1/n}$

  c. $(x_1 \cdots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$

  d. per induzione

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \leq \frac{\frac{(x_1 + \dots + x_n)}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}}{2}$$

Media aritmetica e geometrica/2

Induzione inversa: $n \Rightarrow n-1$

a. $z = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$

b. per ipotesi induttiva

$$(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} z)^{1/n} \leq$$
$$\leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1} + z}{n} = \frac{(n-1)z + z}{n} = z$$

c. $(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$

d. $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} z \leq z^n$

e. $(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$

$\square$