Tecniche di conteggio

9 Ottobre 2003

Principio della somma

Il numero di elementi dell'unione di una famiglia di insiemi *disgiunti* è la somma del numero di elementi contenuti in ogni singolo insieme

- $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$
- $i \neq j \Rightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{U}_i|$$

Principio del prodotto/1

$\boxed{\text{L'unione di } m \text{ insiemi disgiunti, tutti di cardinalità } n \text{ contiene esattamente } nm \text{ elementi}}$

Principio del prodotto/2

Sia S un insieme di n–uple ordinate (liste) con le seguenti proprietà:

- Ogni lista in S ha la medesima lunghezza n
- Ci sono i_1 diversi possibili elementi iniziali per una lista
- per ogni $j > 1$ e per ogni scelta dei primi $j - 1$ elementi vi sono i_j possibili elementi nella j–esima posizione

ALLORA

$$|S| = i_1 \cdot i_2 \cdots i_n$$

Sottoinsiemi/1

- S insieme, $|S| = n$

- Quante liste distinte di k elementi, tutti diversi fra loro possono essere costruite?

RISPOSTA:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Sottoinsiemi/2

- In quanti modi è possibile ordinare k elementi distinti?

Equivale a chiedere quante liste di k elementi distinti possono essere costruite a partire da un insieme T con $|T| = k$

RISPOSTA:

$$k(k-1)\cdots 2 = k!$$

Sottoinsiemi/3

- S insieme, $|S| = n$
- Quanti sono i sottoinsiemi di S contenenti esattamente k elementi?

Osservazione:

$$\text{Lista senza ripetizioni} = \text{Insieme ordinato}$$

RISPOSTA:

$$\left|\left\{\begin{array}{l}\text{Liste senza ripetizioni di lunghezza}\\ k\end{array}\right\}\right| \Big/ \left|\left\{\begin{array}{l}\text{Possibili ordinamenti di una}\\ \text{lista di } k \text{ elementi}\end{array}\right\}\right|$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Coefficienti binomiali/1

n						k
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

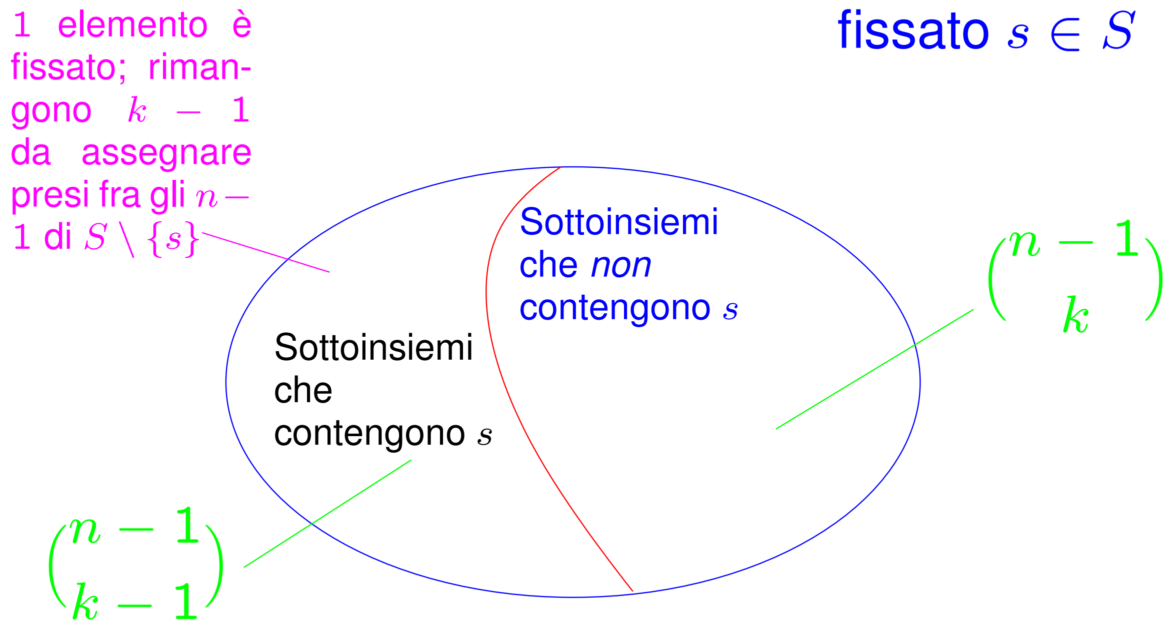
Coefficienti binomiali/2

Th: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dim:

- Usare il principio della somma
- Rappresentare l'insieme di *tutti i sottoinsiemi di* S *con* k *elementi* come unione disgiunta di due insiemi

fissato $s \in S$



Sottoinsiemi di un insieme

Quanti sottoinsiemi contiene un insieme B?

RISPOSTA:

- $S \subseteq Q, \quad b \in B$
- Due possibilità:

  a. $b \in S$

  b. $b \notin S$
- Per il principio del prodotto:

$$|\{S : S \subseteq B\}| = 2^{|B|}$$

COROLLARIO:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Prodotto cartesiano

- B, C insiemi
- $B \times C = \{(b, c) : b \in B, c \in C\}$ (prodotto cartesiano)

Th:

$$|B \times C| = |B||C|$$

Dim: Usando il principio del prodotto su insiemi del tipo

$$\{b\} \times C = \{(b, C) : c \in C\}$$

Relazioni fra insiemi

- B, C insiemi
- $R \subseteq B \times C$ relazione

Quante relazioni sono possibili fra B e C?

RISPOSTA (in due modi)

A) contiamo i sottoinsiemi di $B \times C$

$$2^{|B||C|}$$

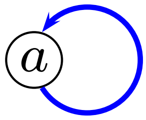
B) per ogni $b \in B$, consideriamo $R_b := \{c \in C : (b, c) \in R\}$. Ci sono $2^{|C|}$ possibilità *per ogni* b. Per il principio del prodotto

$$2^{|B||C|}$$

Relazioni su un insieme

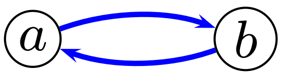
$R \subseteq B \times B$

Riflessiva



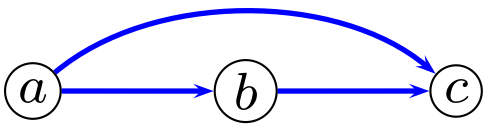
$$(a, a) \in R$$

Simmetrica



$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

Transitiva



$$(a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

Relazioni d'ordine/1

$$\leq$$

- Riflessiva:

$$a \leq a$$

- Antisimmetrica:

$$a \leq b \;\&\; b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$$

- Transitiva:

$$a \leq b \;\&\; b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$$

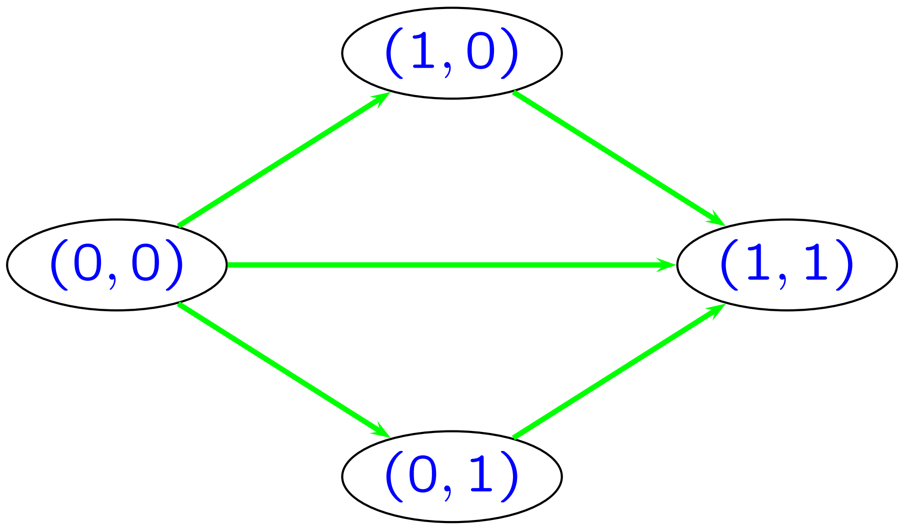
Una relazione d'ordine $\leq$ si dice totale in S se, comunque dati $a, b \in S$ è vero $a \leq b$ oppure $b \leq a$

Relazioni d'ordine/2

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

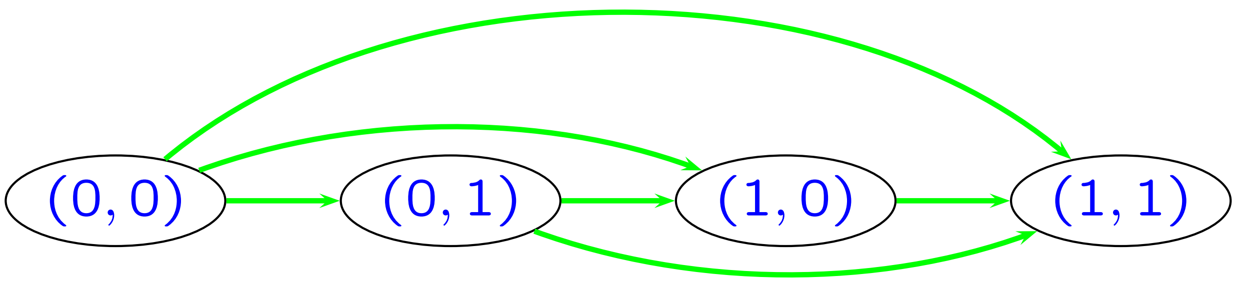
Ordine parziale

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \;\&\; b \leq d$$



Ordine totale (lessicografico)

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a < c \text{ oppure } (a = c \;\&\; b \leq d)$$



I cappi sono stati omessi in entrambi i grafi

Relazioni di equivalenza

$$\sim$$

- Riflessiva:

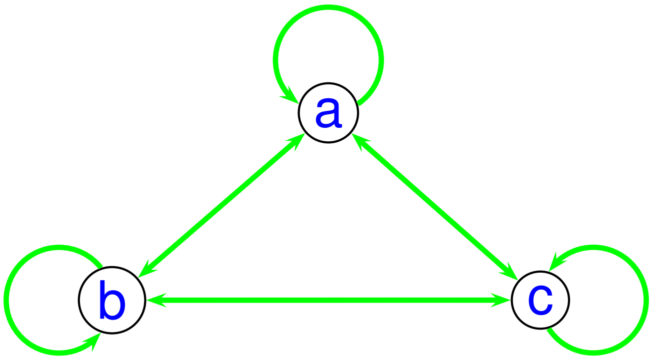
$$a \sim a$$

- Simmetrica:

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

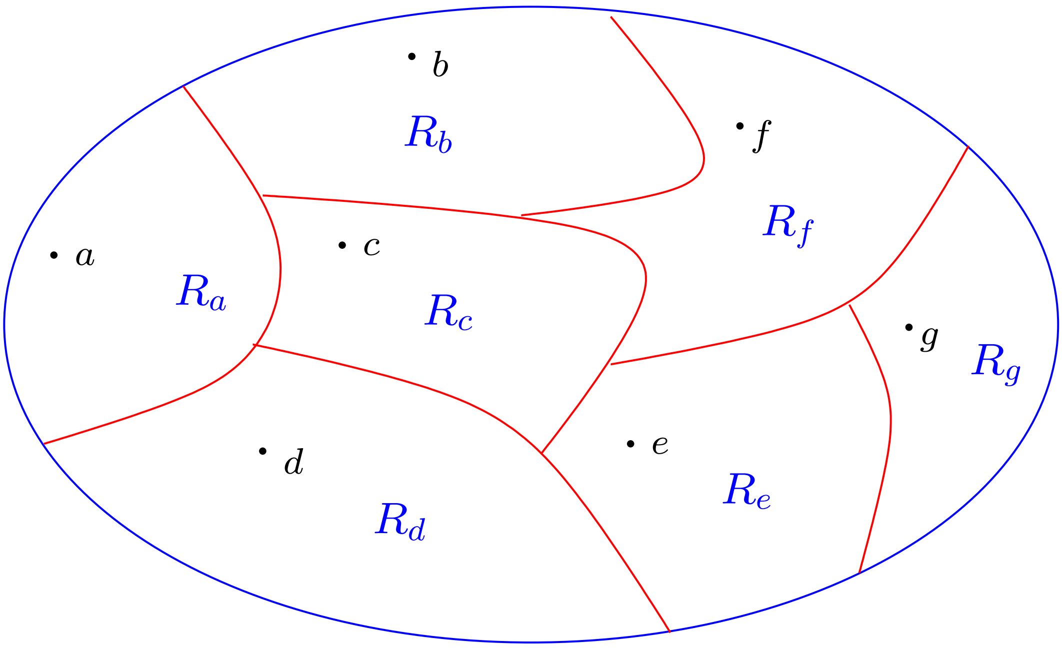
- Transitiva:

$$a \sim b \;\&\; b \sim c \Rightarrow a \sim c$$



Relazioni di equivalenza/2

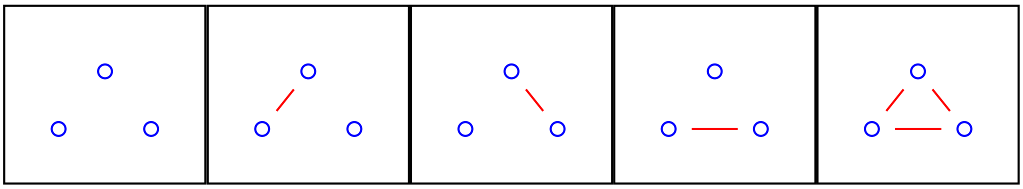
Assegnare una relazione R di equivalenza su di un insieme S è equivalente a fornire una *partizione* di S in sottoinsiemi a due a due disgiunti



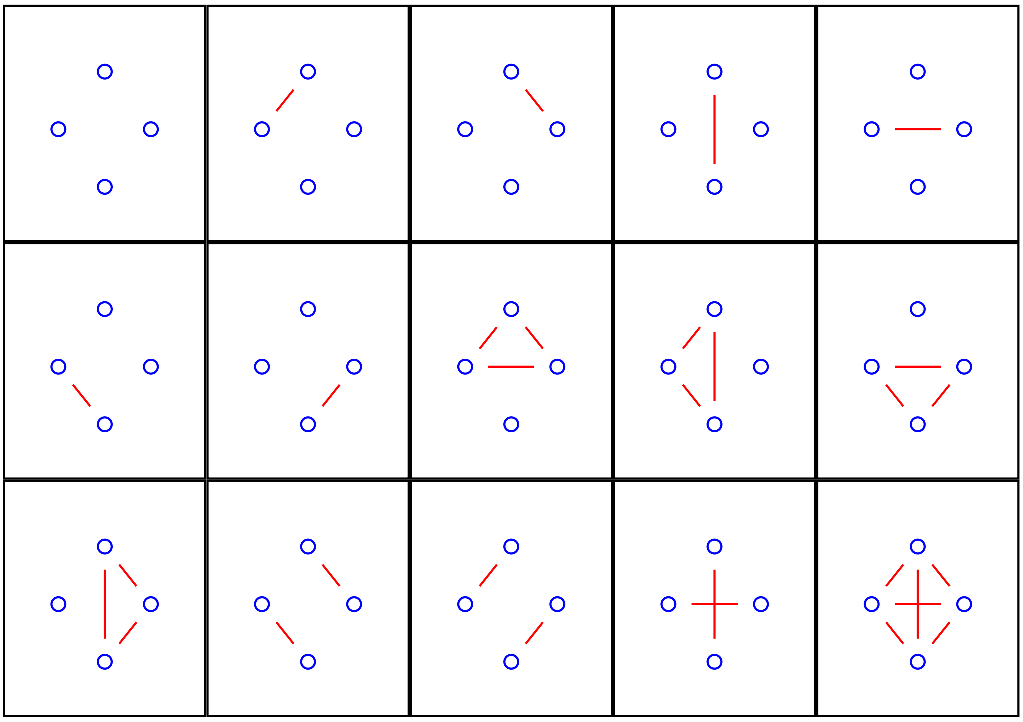
Relazioni di equivalenza/3

Quante relazioni di equivalenza possono essere definite su di un insieme S?

[Equivalentemente: Quante partizioni in sottoinsiemi disgiunti ammette un insieme S?]



$B_3 = 5$



$B_4 = 15$

Relazioni di equivalenza/4: Numeri di Bell

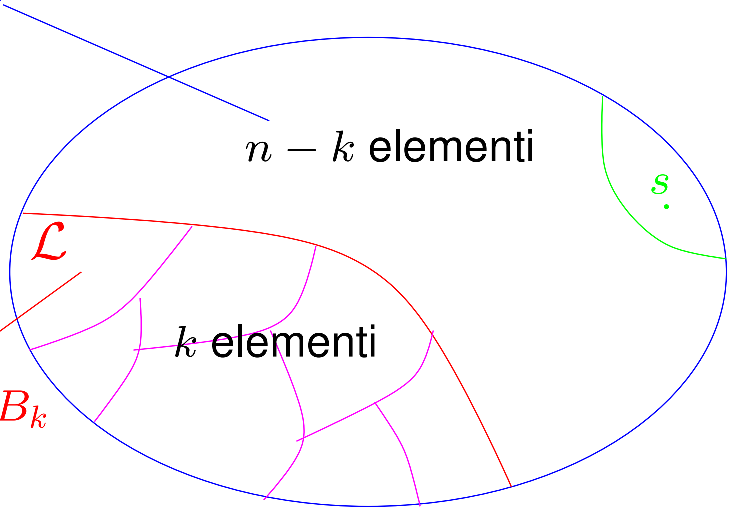
Th: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k}$

Dim: Usiamo entrambi i principi del prodotto e della somma

S insieme, $\quad |S| = n + 1$

fissato $s \in S$

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
possibilità



Sono possibili B_k diverse partizioni

Relazioni di equivalenza/5: Numeri di Bell

Partizione di S = Partizione di $\mathcal{L}$ $\cup$ $\{S \setminus \mathcal{L}\}$

Esempio

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ fissiamo 1

$k = 0$ $\{1, 2, 3, 4\}$

$k = 1$ $\{1, 2, 3\} \cup \{4\}$ $\{1, 3, 4\} \cup \{2\}$
$\{1, 2, 4\} \cup \{3\}$

$k = 2$ $\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$ $\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$
$\{1, 3\} \cup \{2, 4\}$ $\{1, 3\} \cup \{2\} \cup \{4\}$
$\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$ $\{1, 4\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

$k = 3$ $\{1\} \cup \{2, 3, 4\}$ $\{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\}$
$\{1\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\}$ $\{1\} \cup \{3, 4\} \cup \{2\}$
$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$