Sottospazi affini $\longleftrightarrow$ Sottospazi lineari

$\uparrow\downarrow$

soluzioni di sistemi lineari ~~omogenei~~. compatibili

Studiare la posizione reciproca di 2 rette nel piano
di 2 piani nello spazio.

$n=2$

$r: \ ax+by+c=0$

$s: \ a'x+b'y+c'=0$

$(A|B) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	
1	1	$r=s$
1	2	$r\cap s=\emptyset$
2	2	$r\cap s=\{P\}$.

(first two rows: $r/\!/s$)

$r/\!/s \iff rk(A)=1$

$n=3$

$\pi : ax+by+cz+d=0$

$\sigma : a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\pi // \sigma \iff rk(A)=1$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	
1	1	$\pi=\sigma$
1	2	$\pi\cap\sigma=\emptyset$
2	2	$\pi\cap\sigma=r$ retta.

$\left.\begin{matrix}\pi=\sigma\\ \pi\cap\sigma=\emptyset\end{matrix}\right\}\ \pi//\sigma$

posizioni reciproche piano/retta. $n=3$

$\pi \quad ax+by+cz+d=0 \qquad (a,b,c)\neq(0\,0\,0)$

$r\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0\\ a''x+b''y+c''z+d''=0\end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}=2$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	
2	2	$r\subseteq\pi$
2	3	$r\cap\pi\neq\emptyset$
3	3	$r\cap\pi=\{P\}$.

$\left.\begin{matrix}r\subseteq\pi\\ r\cap\pi\neq\emptyset\end{matrix}\right]\ r//\pi$

$\pi : ax+by+cz+d=0$

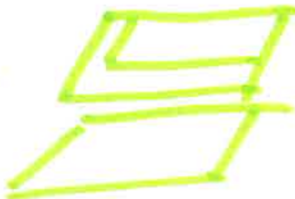
$\sigma : a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vartheta : a''x+b''y+c''z+d''=0$

$(a,b,c),(a',b',c'),(a'',b'',c'')\neq(000)$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	
1	1	$\pi=\sigma=\vartheta$
1	2	$\pi // \sigma // \vartheta$ con $\pi\cap\sigma=\emptyset$ oppure $\pi\cap\vartheta=\emptyset$.
2	2	$\pi\cap\sigma\cap\vartheta=r$ retta.
2	3	$\pi\cap\sigma\cap\vartheta=\emptyset \longrightarrow$ BISOGNA STUDIARE DI PIÙ.
3	3	$\pi\cap\sigma\cap\vartheta=\{P\}$.

i piani formano una stella di centro P.

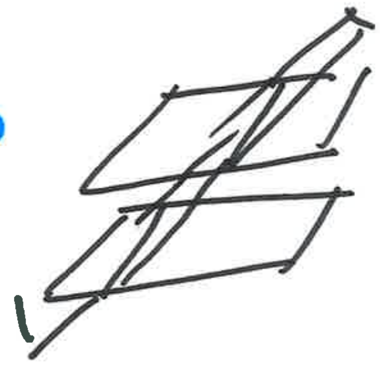
$(1,2)=$  oppure 

$\pi\neq\sigma\neq\vartheta$

$\pi\neq\vartheta$

$\pi \cap \sigma \cap \vartheta = \phi$ $\quad$ $rk(A)=2$ $\quad$ $rk(A|B)=3$

$rk(A)=2$ vuol dire che non tutti e 3 i piani sono paralleli



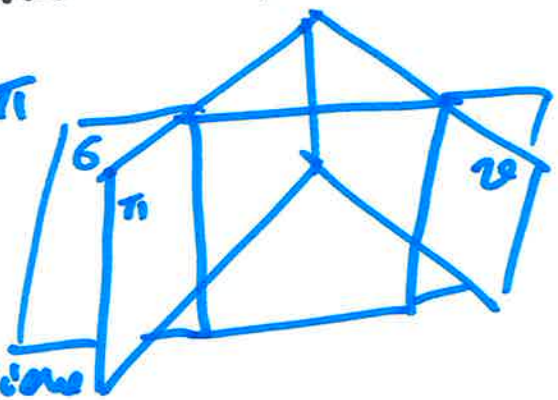
→ o $\pi /\!/ \sigma$ e ϑ non parallelo

o $\pi /\!/ \vartheta$ e σ non parallelo

o π non parallelo e $\sigma /\!/ \vartheta$

(2 piani paralleli ed uno trasversale).

→ $\pi \not\parallel \sigma$, $\sigma \not\parallel \vartheta$ e $\vartheta \not\parallel \pi$



$rk(A|B)=3 \Rightarrow$ i piani non hanno intersezione comune.

$\neq rk(A)$

posizione reciproca di 2 rette nello spazio $AG(3,\mathbb{K})$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad s \begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{cases}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \qquad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$$

il sistema omogeneo di r è equiv. a quello di s.

$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
2	2	∞^1 sol	$r=s$] $r//s$
2	3	$\emptyset$	$r\cap s=\emptyset$] $r//s$
3	3	1 sol	$r\cap s=\{P\}$
3	4	$\emptyset$	r,s sono sghembe

Def: Due rette sono dette <u>complanari</u> se esse sono contenute in un piano; <u>sghembe</u> se non esiste un piano che le contenga entrambe.

<u>proposizione</u>: In $AG(n, \mathbb{K})$ $n \geq 3$ due rette sono sghembe $\Leftrightarrow$ esse non sono parallele e non hanno alcuna intersezione. Date due rette sghembe r, s esistono esattamente 2 piani π, σ con $r \subseteq \pi$, $s \subseteq \sigma$ e $\pi // \sigma$. in $AG(3, \mathbb{K})$.

<u>DIM</u>: Se 2 rette $r = [P; V_1]$ $s = [Q; W_1]$ sono incidenti $\Rightarrow r \cap s = R \Rightarrow$ ~~Rs~~ $r = [R; V_1]$

$s = [R; W_1] \Rightarrow r, s \subseteq [R; V_1 \oplus W_1] \Rightarrow$

r ed s sono complanari.

Similmente se $r // s \Rightarrow r = [P; V_1]$ $s = [Q, V_1]$

$r, s \subseteq [P, V_1 + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$

Dobbiamo mostrare che se $r \not\parallel s$ e $r \cap s = \emptyset \Rightarrow$ non $\exists$ un piano che le contiene entrambe.

$r = [P; V_1]$ $\quad$ $s = [Q, W_1]$ e $V_1 \neq W_1$

$Q \notin r$

consideriamo un sottospazio Σ che contenga sia r che s $\Rightarrow$ $\Sigma = [P; W]$

con $\underbrace{V_1 \leq W}_{r \subseteq \Sigma}$, $\underbrace{W_1 \leq W}_{s \subseteq \Sigma}$ e $\underbrace{\mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}) \leq W}_{Q \in \Sigma}$

asserisco che posto $V_1 = \mathcal{L}(\bar{v}_1)$, $W_1 = \mathcal{L}(\bar{w}_1)$ i vettori $(\bar{v}_1, \bar{w}_1, \overrightarrow{PQ})$ sono liberi.

Se così non fosse $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{w}_1) \Rightarrow$ le rette r ed s sarebbero incidenti.

$\rightarrow$ ne segue che $\dim \Sigma = 3 = \dim W$ e dunque r, s non sono contenute in un piano comune.

Se r ed s sono sghembe $r = [P; V_1]$
$s = [Q; W_1]$

$$\Rightarrow \pi = [P; V_1 \oplus W_1]$$
$$\sigma = [Q; V_1 \oplus W_1] \rightarrow \pi \parallel \sigma \quad r \subseteq \pi, \; s \subseteq \sigma.$$

N.B. Date 2 rette parallele $\exists$ infiniti piani paralleli che contengono solo una di esse; $\exists!$ piano che le contiene entrambe.

Date 2 rette sghembe $\exists$ esattamente 2 piani paralleli dei quali uno contiene la prima ed uno la seconda. Non $\exists$ un piano che le contiene entrambe.

Fasci di
- rette
- piani

stelle
- di rette
- di piani.

Def.: Si dice in AG(2, IK) <u>fascio proprio</u> di rette l'insieme di tutte le rette che passano per un punto P (P è detto <u>centro del fascio</u>).

Si dice in AG(2, IK) <u>fascio improprio</u> di rette l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

In AG(3, IK) si dice <u>fascio proprio</u> di piani l'insieme di tutti i piani che contengono una retta data;* e si dice <u>fascio improprio</u> l'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano dato.

* detta sostegno del fascio.

Un fascio è una collezione di ∞^2 oggetti che soddisfano delle condizioni lineari.

$n=2$

$P=(x_0, y_0)$ sia $r = ax+by+c=0$ una generica retta.

$P \in r \iff ax_0+by_0+c=0 \quad (a,b)\neq(0\,0)$

$\downarrow$

equazione in 3 incognite (a,b,c) di primo grado

$\Rightarrow$ ∞^2 soluzioni ma soluzioni proporzionali danno la medesima retta. $\Rightarrow$ # totale rette ∞^2

<u>OSS:</u> Sia S = insieme delle soluzioni (a, b, c) dell'eq. $ax_0 + by_0 + c = 0$

$$\Rightarrow S = \mathcal{L}((a' b' c'), (a'' b'', c''))$$

è generato da 2 qualsiasi suoi elementi indipendenti (cioè non proporzionali).

una retta per P è $x = x_0$ $(1\ 0\ -x_0)$

ed un'altra è $y = y_0$ $(0\ 1\ -x_0)$

In particolare la generica retta del fascio avrà equazione $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $(\alpha, \beta) \neq (0 0)$.

Fascio improprio: $s: ax+by+c=0$

$r: a'x+b'y+c'=0$ retta data.

$s \parallel r \iff rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ $\quad ab'-ba'=0$

$\iff s: \; a'x+b'y+c=0 \quad c \in K$

∞^1 possibili rette.

SI DICE CHE r ed s sono parallele ovvero che r ed s hanno lo stesso <u>punto improprio</u>.

<u>N.B.</u> In questo caso $S = \mathcal{L}((a\ b\ 0), (0\ 0\ 1))$

<u>N.B.</u>: $(0\ 0\ 1)$ corrisponde all'eq. <u>$1=0$</u> che non è una retta.

$n=3$

Tutti i piani per una retta (fascio proprio)

$$r \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}=2.$$

$$\pi:\ ax+by+cz+d=0$$

$r \subseteq \pi \iff$ il sistema di $r \cap \pi$ è equivalente al sistema descritto da $r \iff$

$(a\ b\ c\ d) \in \mathcal{L}((a'\ b'\ c'\ d'),(a''\ b''\ c''\ d''))$.

un piano π del fascio di sostegno r deve avere equazione

$$\alpha(a'x+b'y+c'z+d')+\beta(a''x+b''y+c''z+d'')=0$$

∞^2 equazioni ma ∞^1 piani.

Tutti i piani paralleli ad un piano dato (fascio improprio).

$\pi: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\sigma: ax + by + cz + d = 0$ $\quad rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1$

$\sigma: a'x + b'y + c'z + d = 0 \quad d \in \mathbb{K}.$

$\cancel{(a', b', c', d')}$ $\quad (a\ b\ c\ d) \in \mathcal{L}((a'\ b'\ c'\ d'), (0\ 0\ 0\ 1)).$

come per le rette questo non rappresenta un piano affine.

$n=3$

Def: Si dice stella propria di piani l'insieme di tutti i piani che passano per un punto dato.

Si dice stella impropria di piani l'insieme di tutti i piani che hanno una direzione comune nella loro giacitura.

Si dice stella propria di rette in $AG(3,\mathbb{K})$ l'insieme di tutte le rette per un punto e stella impropria l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

STELLE = ∞^2 ELEMENTI

STELLE DI PIANI PROPRIE

$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$

$P = (x_0 \ y_0 \ z_0)$.

$a x_0 + b y_0 + c z_0 + d = 0$ si risolve

∞^3 soluzioni/a meno di prop. ∞^2 piani.

$\pi \quad x = x_0$

$\sigma \quad y = y_0$

$\vartheta \quad z = z_0$

$S = \mathcal{L}((1\,0\,0\,-x_0),$
$(0\,1\,0\,-y_0)$
$(0\,0\,1\,-z_0))$

$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0\,0\,0)$
$\in \mathbb{K}^3$

STELLE DI PIANI IMPROPRIE.

$\exists\ \bar{v} = (l, m, n)$ che deve appartenere alla giacitura del piano

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$al + bm + cn = 0$

In particolare $(a, b, c) \in (l, m, n)^\perp$

$$S = \cancel{(l\,m\,n)^\perp \oplus}$$
$$\{(a, b, c, d) \mid (a\ b\ c) \in (l\ m\ n)^\perp\} =$$
$$= \cancel{\{(a\ b\ c)}\ \{(a, b, c, 0) \mid (a\ b\ c) \in (l\ m\ n)^\perp\} + \mathcal{L}((0\,0\,0\,1))$$

ma osserviamo che $\mathcal{L}(0\,0\,0\,1) \subseteq (l\,m\,n\,0)^{\perp}$

$\Rightarrow S = (l\ m\ n\ 0)^{\perp}$

$\dim S = 3$ ma eq. equivalenti

a meno di coeff. di proporzionalità.

Inoltre i vettori del tipo $(0\,0\,0\,d) \in S$

non rappresentano piani. (ma gli altri sì).

STELLE DI RETTE: $\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

impongo passaggio per $(x_0\ y_0\ z_0)$

8 incognite / 2 equazioni

per la prima eq. otteniamo ∞^2 piani

per la seconda eq. " ∞^2 piani $\rightarrow \infty^4$ piani

osservo che ogni 2 piani del medesimo fascio determinano la stessa retta.
(ovvero il sistema ha dim. = 2) $\Rightarrow \infty^2$ rette.

rette di una stella propria

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

$(\ell, m, n) \neq (0 0 0)$ varia in $\mathbb{K}^3$

se due elementi $(\ell\ m\ n)$ sono prop. $\Rightarrow$ descrivono la stessa retta $\Rightarrow \infty^2$ rette.

rette di una stella impropria

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

ove (ℓ, m, n) fissati
$(x_0\ y_0\ z_0)$ variano

∞^3 possibilità per
$(x_0\ y_0\ z_0)$
MA PUNTI SU DI UNA
STESSA RETTA DANNO
LA MEDESIMA RETTA.

$\Rightarrow \infty^2$ rette. $\square$

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE SUI SOTTOSPAZI LINEARI.

Supponiamo di avere $P_1 = (x_{11} \dots x_{1n})$

$\vdots$

$P_K = (x_{K1} \dots x_{Kn})$.

e di volere trovare le equazioni del sottospazio generato da $P_1 \dots P_K$.

$$\Sigma = [P_1 ; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_k})]$$

$$X = (x_1 \dots x_n) \in \Sigma \iff$$

$$\overrightarrow{P_1X} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_k})$$

$$rk \begin{bmatrix} x_1 - x_{11} & x_2 - x_{12} & \dots & x_n - x_{1n} \\ x_{21} - x_{11} & x_{22} - x_{12} & \dots & x_{2n} - x_{1n} \\ \vdots & & & \\ x_{k1} - x_{11} & \dots & & x_{kn} - x_{1n} \end{bmatrix} =$$

$$= rk \begin{bmatrix} x_{21} - x_{11} & \dots & x_{2n} - x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} - x_{11} & & x_{kn} - x_{1n} \end{bmatrix}$$

$$rk \begin{bmatrix} x_{11}-x_{11} & x_{12}-x_{12} & \cdots & x_{1n}-x_{1n} \\ x_{21}-x_{11} & x_{22}-x_{12} & \cdots & x_{2n}-x_{1n} \\ \vdots & & & \\ x_{k1}-x_{11} & & & x_{kn}-x_{1n} \end{bmatrix} =$$

$$rk \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} & 1 \end{bmatrix} - 1$$

$$=$$

$$rk \begin{bmatrix} x_1-x_n & & & x_n-x_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ x_{21}-x_{11} & & & x_{2n}-x_{1n} & 0 \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Equazione della retta per 2 punti in $AG(2,\mathbb{K})$.

$P=(x_0,y_0) \quad Q=(x_1,y_1) \quad P\neq Q.$

$$rk\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{pmatrix}=1$$

cioè $$rg\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix}=2$$

ovvero $$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix}=0$$

condizione di allineamento di 3 punti

Equazione del piano per 3 punti non allineati in $AG(3,\mathbb{K})$.

$$P=(x_0\ y_0\ z_0) \quad Q=(x_1\ y_1\ z_1)$$
$$R=(x_2\ y_2\ z_2).$$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}}_{rk=2} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

condizione di complanarità di 4 punti.

Nel piano sia

r_0 la retta passante per $P_0 = (x_0, y_0)$

ed avente direzione $\mathcal{L}((l, m))$.

Allora l'equazione di r_0 è data da

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ l & m & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$ax + by + c = 0$ $\qquad \begin{cases} al + bm = 0 \\ ax_0 + by_0 + c = 0 \end{cases}$

In particolare i punti devono soddisfare

$(x\ y\ 1) \cdot \bar{v} = 0 \quad \forall \bar{v} \in S$ { soluzioni del sistema.

md $\bar{V} = (\ell \; m \; 0) \times (x_0 \; y_0 \; 1)$

$$\Rightarrow (x \; y \; 1) \cdot \bar{V} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \ell & m & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(x_0 \; y_0 \; 1) \times (x_1 \; y_1 \; 1)$$