# Forme bilineari

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ una sua base e

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \cdots \bar{e}'_n)$ una sua altra base

se $\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ chiamati ${}^TX$ ed ${}^TX'$ i vettori riga delle componenti di uno stesso vettore $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:

$${}^TX \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = {}^TX' \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \qquad {}^TX A \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} = {}^TX' \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^TXA = {}^TX'$$

$$\boxed{{}^TAX = X'}$$

con $A \in GL(n, \mathbb{K})$.

Se $f: V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ é una funzione lineare (endomorfismo)

$\Rightarrow \exists$ una matrice $F$ che rappresenta $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ ed una matrice $F'$ che rappresenta $f$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

$$F = \begin{bmatrix} c_1 \dots c_n \\ \\ \end{bmatrix}$$

colonne = componenti del vettore $f(\bar{e}_i)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$F' = \begin{bmatrix} c_1' \dots c_n' \end{bmatrix}$$

colonne = componenti di $f(\bar{e}_i')$ rispetto $\mathcal{B}'$

$F, F'$ : che legame c'é?

$F, F' \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Sia $b$ una forma bilineare $b: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$.
e siano $G$ e $G'$ le matrici che rappresentano $b$ rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

$$G = \begin{bmatrix} b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & b(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \dots & b(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots & & \\ b(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & \dots & b(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

$$G' = \begin{bmatrix} b(\bar{e}'_1, \bar{e}'_1) & \dots & b(\bar{e}'_1, \bar{e}'_n) \\ \vdots & & \\ b(\bar{e}'_n, \bar{e}'_1) & \dots & b(\bar{e}'_n, \bar{e}'_n) \end{bmatrix}$$

che legame c'é fra $G$ e $G'$?

$$\boxed{X' = {}^{T}\!A X} \qquad X = {}^{T}\!A^{-1} X'$$

vettore comp. rispetto $\mathcal{B}'$ $\xrightarrow{{}^{T}\!A^{-1}}$ vettore comp. rispetto a $\mathcal{B}$ $\rightarrow \boxed{F} \rightarrow$ vettore compon. rispetto a $\mathcal{B}$ $\xrightarrow{{}^{T}\!A}$ vettore comp. rispetto $\mathcal{B}'$

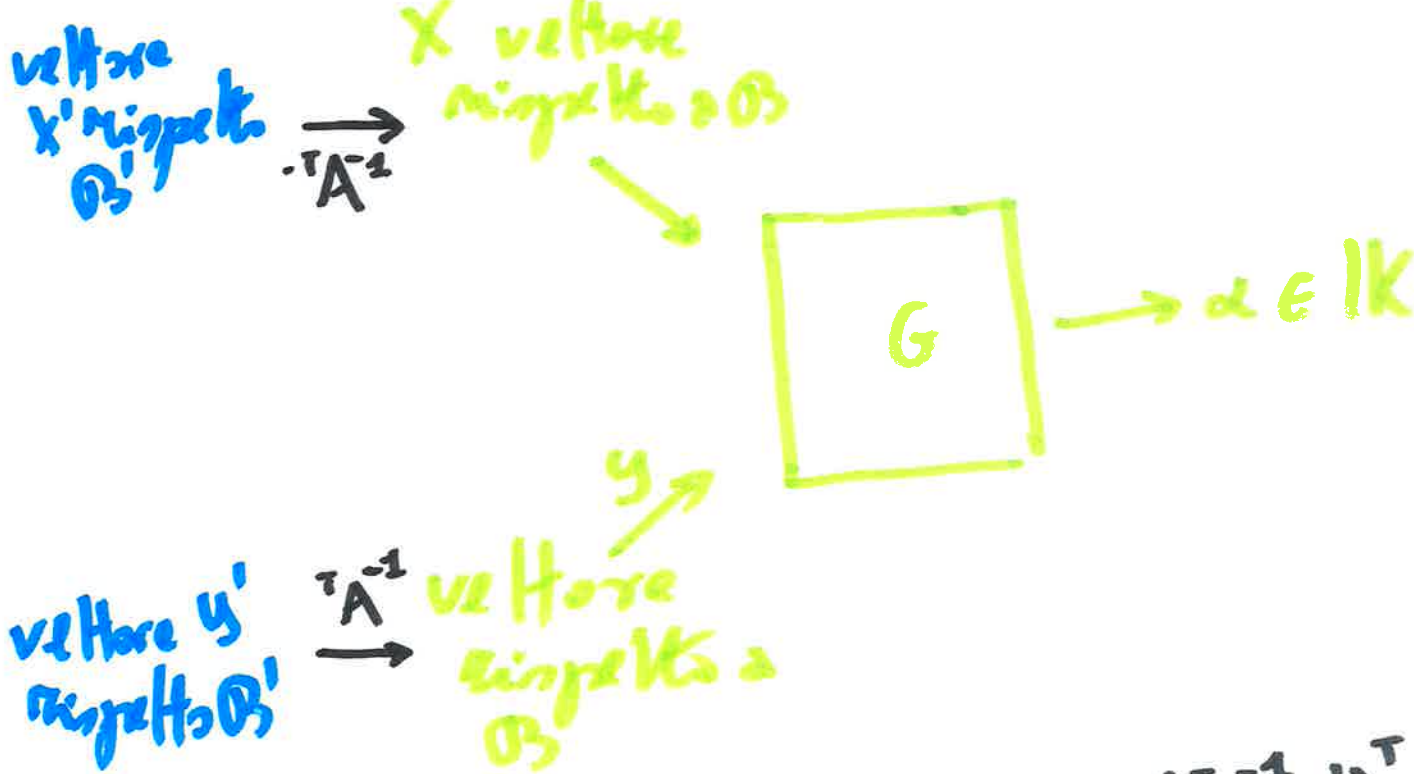
$$F' = {}^{T}\!A \, F \, {}^{T}\!A^{-1}$$

cambiamento di base per ~~[illegible]~~ endomorfismi.

Def: Due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette simili se esiste una matrice $C \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$A = C^{-1} B C$$

$\Rightarrow$ cambiamento di base per endomorfismi $\Rightarrow$ manda F in una matrice simile ad F.




$$
\begin{aligned}
{}^T x G y &= ({}^T A^{-1} x')^T G ({}^T A^{-1} y') = \\
&= {}^T x' (A^{-1} G \, {}^T A^{-1}) y'
\end{aligned}
$$

$$G' = A^{-1} G \, {}^T A^{-1}$$

o, scritto ponendo $P = A^{-1}$

$$G' = P G \, {}^T P$$

N.B. in generale $P G \, {}^T P \neq P G P^{-1}$

<u>OSS</u>: Il rango di $G$ ed il rango di $G'$ sono uguali!

In particolare il rango di una forma bilineare $b$ definito come

$$rk(b) := rk(G)$$ ove $G$ è una sua qualsiasi matrice rappresentativa è ben posto.

Inoltre, posto $Rad_L(b) := \{\bar{x} \in V : b(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \forall \bar{y} \in V\}$.

si vede subito che $Rad_L(b)$ in componenti corrisponde alle soluzioni di ${}^TX G = \underline{0}$ da cui ${}^TG X = \underline{0}$ e segue $\dim Rad_L(b) = n - rk(G) =$

$= n - rk(b)$.

(e $Rad_L$ è un sottospazio vettoriale).

$Rad_R(b) := \{\bar{y} \in V : b(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \forall \bar{x} \in V\}$ in generale

$Rad_R(b) \neq Rad_L(b)$ ma se $b$ è simmetrica o antisimmetrica coincidono e scriviamo $\mathrm{Rad}(b)$.

Sia $a \in V_n(\mathbb{K})$ e $b(\bar{x},\bar{y}): V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica. Indichiamo ~~b(x,y)~~.

$$b(\bar{x},\bar{y}) = \cancel{B_{xy}}\ \bar{x}\cdot\bar{y}$$

Vogliamo scrivere $\bar{a}^\perp$ in componenti.

$$\bar{a}^\perp := \{\bar{x} \in V : \bar{a}\cdot\bar{x} = 0\}.$$ in componenti

$$a^\perp := \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n : {}^T\bar{a}\, G\bar{x} = 0\}.$$

corrisponde alle soluzioni del sistema lineare omogeneo di una equazione in $n$ incognite

$$({}^T\bar{a}\, G)\bar{x} = 0$$

$a^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$ è sottospazio di $V_n(\mathbb{K})$.

Sia $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow X^\perp = \{\bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) \mid \forall \bar{x} \in X : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0\}$.

vediamo che 1) $X^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$ in quanto corr. all'intersezione di $\bar{x}^\perp$ $\forall \bar{x} \in X$ e questi sono tutti sottospazi.

2) $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$

infatti se $\bar{a} \in X^\perp \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{x} = 0 \ \forall \bar{x} \in X$

$\Rightarrow$ presi $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in X$, $a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}$.

$\bar{a} \cdot (a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n) =$

$= (\bar{a} \cdot \bar{x}_1) a_1 + \dots (\bar{a} \cdot \bar{x}_n) a_n = 0$

$\Rightarrow a \in \mathcal{L}(x^\perp)$.

viceversa, visto che $X \subseteq \mathcal{L}(X)$

abbiamo $\bar{a} \in \mathcal{L}(X)^{\perp} \Rightarrow \forall \bar{x} \in X : \bar{a} \cdot \bar{x} = 0$

$\Rightarrow \bar{a} \in X^{\perp}$.

3) $X^{\perp} = \mathcal{B}_X^{\perp}$ ove $\mathcal{B}_X$ è una base di $\mathcal{L}(X)$

DA cui, posto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$

le componenti di $\mathcal{B}_X$ rispetto una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ e $G$ = matrice della forma bilineare $b(\bar{x}, \bar{y})$ vediamo che

$$X^{\perp} = \{ {}^T(\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n) = {}^T y \mid {}^T y \, G^T A = \underline{0} \} =$$

= insieme delle soluzioni del

sistema

$${}^T y\, G\, {}^T A = \underline{0}$$

che è anche insieme sol. di

$$\boxed{(A\, G)\, y = \underline{0}}$$

Nel caso specifico $G = I$, $X^{\perp}$ = soluzioni di

$$A y = \underline{0}$$

ove $A$ contiene come righe i vettori di una base di $\mathcal{L}(X)$.

__Esempio__: In $\mathbb{R}^4$, prod. scalare std.

$$X = \{(1\,2\,0\,0),\ (0\,1\,0\,0),\ (1\,0\,0\,0),\ (0\,7\,1\,5)\}.$$

$$X^{\perp} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

$$= \{(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 0\}.$$

In $\mathbb{R}^3$ si trovi $X^{\perp}$ ove $X = \{(1\,0\,0),\ (1\,2\,0)\}$

e il prodotto scalare è descritto

dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x_3 = 0$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$x_1 = -x_2$

$$\{(x_1, -x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

4) Se $X \subseteq Y \Rightarrow Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$

$X \subseteq Y \Rightarrow \forall \bar{x} \in X,\ \bar{x} \in Y \Rightarrow$ in particolare

se $\forall \bar{y} \in Y : \bar{y} \cdot \bar{a} = 0 \Rightarrow \forall \bar{x} \in X : \bar{x} \cdot \bar{a} = 0$

perché $\bar{x} \in Y$

$\Rightarrow \bar{a} \in Y^{\perp} \Rightarrow \bar{a} \in X^{\perp}$

5) $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$ $\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$

$X \neq \emptyset$

Sia $\bar{a} \in X \Rightarrow \forall \bar{b} \in X^{\perp} : \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ in particolare si ha $\bar{b} \cdot \bar{a} = 0$

e quindi $\bar{a} \in X^{\perp\perp}$.

$X \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$ perché $X^{\perp\perp}$ sott. vettoriale.

6) Supponiamo $Rad(b) = \{\bar{0}\}$ cioè $rk(b) = n$

$\Rightarrow \quad X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$

osserviamo che $X^{\perp}$ si ottiene risolvendo un sistema $(AG)y = \underline{0}$ ove $A$ matrice che ha per righe le componenti dei ~~vettora~~ vettori di una base di $X$.

In particolare se $rk(G) = n \Rightarrow \det(G) \neq 0$

$\Rightarrow rk(AG) = rk(A) = \dim \mathcal{L}(X)$.

$\Rightarrow \dim X^{\perp} = n - rk(A) = n - \dim \mathcal{L}(X)$.

$$\Rightarrow \dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^{\perp} = n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) = \\ = \dim \mathcal{L}(X).$$

D'altro canto $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) = X^{\perp\perp}$ $\square$

Esercizio:

In $\mathbb{R}^4$ trovare un sistema lineare omogeneo di equazioni le cui soluzioni siano $W = \mathcal{L}((\underset{\bar{v}_1}{1200}), (\underset{\bar{v}_2}{0110}))$.

le equazioni che devono essere soddisfatte da tutti (e soli) i vettori di $W$ sono date in una matrice $A$ le cui righe soddisfano

$$\cancel{R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad R_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0}$$

$\vdots$

$R_1^T(1\,2\,0\,0) = 0$ $\qquad$ $R_2^T(1\,2\,0\,0) = 0$

$R_1^T(0\,1\,1\,0) = 0$ $\qquad$ $R_2^T(0\,1\,1\,0) = 0$

etc. etc.

cioè sono elementi dello spazio vettoriale

$\{\bar{x} \mid \bar{x}^T\bar{v}_1 = 0,\ \bar{x}^T\bar{v}_2 = 0\}$. ovvero

di $W^\perp$ con il prod. scalare std.

poiché sappiamo che il sistema che ci interessa è descritto da una base di tale sott., calcoliamo quello che ci serve.

$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\cdot(1\,2\,0\,0) = 0$

$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\cdot(0\,1\,1\,0) = 0$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$

$$W^\perp = \mathcal{L}((-2, 1, -1, 0), (0\,0\,0\,1))$$

EQUAZIONI PER $W$: $\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

ci tornano tutte, infatti $\dim W = 2$

$\Rightarrow$ ~~dim~~ rk sistema che descrive $W = 4 - 2 = 2$

e $\dim W^\perp = 4 - \dim W = 2$.

Esercizio: Si determini l'intersezione al variare di $k \in \mathbb{R}$ di

$$U_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + 3x_2 + kx_5 = 0 \quad (k+1)x_1 + x_4 + x_5 = 0\}$$

e $W = \mathcal{L}((1\,1\,1\,1\,1), (0\,1\,1\,0\,0))$.

calcoliamo le eq. per $W$.

$$W^{\perp} = \mathcal{L}((0\,1\,-1\,0\,0), (0\,0\,0\,1\,-1), (1\,0\,0\,-1\,0)).$$

so che $\dim W^{\perp} = 5 - \dim W = 3$

metto a sistema le 5 equazioni (3 da $W^{\perp}$ + 2 date).

$$A = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & k \\ k+1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} U_k \\ \\ \\ W \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$rk(A) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 3 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \pm 3 \neq 0$$

$rk(A) \geq 4 \quad \forall k$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & k \\ k+1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \pm 3 \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\pm 3}{=} \begin{vmatrix} k+1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm 3 \begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

in particolare se $-(k+1)-2=-k-3=0$

$\Rightarrow rk(A)=4$

se $k \neq -3 \Rightarrow rk(A)=5$

se $k=-3 \Rightarrow rk(A)=4 \Rightarrow \dim \mathcal{U}_k \cap W = 5-4=1$

e $\dim \mathcal{U}_k + W = 2+3-1=4$

se $k \neq -3 \Rightarrow rk(A)=5 \Rightarrow \dim \mathcal{U}_k \cap W = 0 \Rightarrow$

$\mathcal{U}_k \oplus W$

$\dim \mathcal{U}_k + W = 5 \Rightarrow$

$\mathcal{U}_k \oplus W = \mathbb{R}^5$.

posto $k = -3$ trovare $U_k \cap W$ e $U_k + W$.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \mathrm{I} \\ \\ \leftarrow \mathrm{III} \\ \leftarrow \mathrm{IV} \\ \leftarrow \mathrm{V} \end{array} \end{array}$$

per l'intersezione si risolve il sistema.

per la somma si trova [illegible] fondamentale ed essa è generata da quello.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x \quad - 3t = 0 \end{cases}$$

N.B. sono omogenee.

$$S = ((2\ {-1}\ {-1}\ 0), (1\ 0\ 0\ {-3}))^{\perp}$$

$$S^{\perp} = ((2\ {-1}\ {-1}\ 0), (1\ 0\ 0\ {-3}))^{\perp\perp} = \mathcal{L}((2\ {-1}\ {-1}\ 0), (1\ 0\ 0\ {-3}))$$

$$\mathcal{B}_{S^{\perp}} = ((2\ {-1}\ {-1}\ 0), (1\ 0\ 0\ {-3}))$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + t = 0 \end{cases} \qquad S = (1\ 0\ 0\ {-1}) + \mathcal{L}((1, -1\ 0\ {-1}), (0\ 0\ 1\ 0))$$

$$S^{\perp} = (1\ 0\ 0\ {-1})^{\perp} \cap \mathcal{L}((1\ {-1}\ 0\ {-1}), (0\ 0\ 1\ 0))^{\perp}$$

$(1\ 0\ 0\ -1)^{\perp} \cap \mathcal{L}((1\ 1\ 0\ 0), (1\ 0\ 0\ 1)) =$

$= \cancel{\mathcal{L}((1\ 0\ 0\ -1)) \cap \mathcal{L}(1\ 1}$

tutti i vettori di $[\alpha(1\ 1\ 0\ 0) + \beta(1\ 0\ 0\ 1)]$

tali che $x - t = 0$

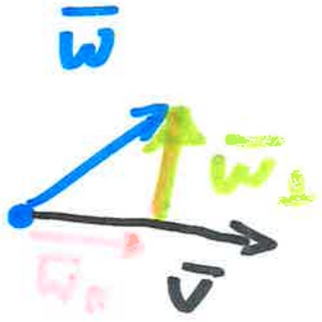
$$\alpha + \beta = -\beta$$

$$\alpha = -2\beta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}((-2\ -2\ 0\ 0) + (1\ 0\ 0\ 1)) =$$

$$= \mathcal{L}((-1\ -2\ 0\ 1))$$

#



**Teorema:** Sia $\overline{v} \in V_n(\mathbb{K})$ tale che $\overline{v} \cdot \overline{v} \neq 0$

e $\overline{w} \in V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ esistono 2 vettori

$\overline{w}_{\parallel}$ e $\overline{w}_{\perp}$ tali che

1) $\overline{w}_{\parallel} = \alpha \overline{v}$

2) $\overline{w}_{\perp} \cdot \overline{v} = 0$

3) $\overline{w} = \overline{w}_{\parallel} + \overline{w}_{\perp}$

$\overline{w}_{\perp} = \overline{w} - \overline{w}_{\parallel}$

**DIM:** poniamo $\overline{w}_{\parallel} = \dfrac{\overline{w} \cdot \overline{v}}{\overline{v} \cdot \overline{v}} \overline{v}$ $\quad \overline{w}_{\perp} \neq \overline{0}$.

calcoliamo $\bar{w}_\perp \cdot \bar{v} =$

$$= \left( \bar{w} - \bar{w}_\perp \right) \cdot \bar{v} =$$

$$= \left( \bar{w} - \frac{\bar{w} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v} \right) \cdot \bar{v} =$$

$$= \bar{w} \cdot \bar{v} - \frac{\bar{w} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} (\bar{v} \cdot \bar{v}) = 0 \qquad \square$$

$$\frac{|v\rangle}{\langle v|v\rangle} |v\rangle$$

**N.B.** il valore $\dfrac{\bar{w} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{w}$ rispetto a $\bar{v}$.

In fisica si scrivono vettori riga $|v\rangle$ ket.

vettori colonna $\langle V|$ bra

prodotto scalare con una matrice $G$

$$\langle x|G|y\rangle$$

se $G=I$ $\langle x|y\rangle$

in generale se ci sono tanti bra a sinistra quanti ket a destra abbiamo un numero.

$(\bar{u}\cdot\bar{v})\cdot\bar{v}$ $\langle\bar{u}|\bar{v}\rangle|v\rangle$ qualchecosa che molt. per un vettore riga a sx di un numero

$\Rightarrow$ vettore colonna.

$|u\rangle\langle v|$

$\rightarrow$ moltiplicato a sx per un vettore riga e a dx per un vettore colonna di un numero.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ \vdots & & & \\ u_nv_1 & \dots & & u_nv_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle}|v\rangle \qquad \frac{|v\rangle|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$$

사영

$$|v\rangle \frac{\langle v|}{\langle v|v\rangle}$$