$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1m}x_1 + \dots + a_{mn}x_n - b_m = 0$$

1) se moltiplico una riga per uno scalare $\neq 0$ le soluzioni non cambiano.

$$\alpha\,(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1) = 0 \qquad \alpha \neq 0$$

2) se ad una riga sommiamo una c. lineare delle rimanenti le soluzioni non cambiano.

OSSERVIAMO CHE LE SOLUZIONI DI $AX = B$

Le soluzioni di un sistema compatibile dipendono da una base delle righe della matrice completa.

<u>OSS</u>: le soluzioni di un sistema compatibile dipendono solo dal sottospazio di $\mathbb{K}^{n+1}$ generato dalle righe della matrice completa.

→ possiamo manipolare le equazioni per cercare soluzioni.

$AX = B$ → si può scrivere anche come

$$(A|B)\begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

sono date da $\boxed{\ker(f_{A|B}) \cap \{\bar{x} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = -1\}}$

ove $f_{A|B} : \begin{cases} \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{m} \\ \bar{x} \rightarrow \cancel{A\bar{x}}\,(A|B)\bar{x} \end{cases}$

$$AX = B \iff \begin{cases} (A|B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \\ x_{n+1} = -1 \end{cases}$$

In particolare vediamo che le soluzioni dipendono solamente dal sottospazio generato dalle righe di $(A|B)$

Infatti se si sostituisce ad una riga di $(A|B)$

lascia somma
con una c. lineare delle rimanenti ed

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ \bar{x}_{n+1} \end{bmatrix} \text{ soluzione di } (A|B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

vediamo che ottenianmo ancora ~~ancora~~

che $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ é ancora soluzione.

Viceversa: se $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ é soluzione di

$$\begin{bmatrix} R_1 + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i R_i \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ \bar{x}_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{n+1} \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i R_i \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = 0 \\ R_2 \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} = 0. \\ \vdots \end{matrix}$$

e dunque sostituendo in $R_1 \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \sum \alpha_i R_i \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

il fatto che $\sum \alpha_i R_i \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = 0$

si ha $R_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0$ e siamo a posto

$\square$

$$(A|B) = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

$\ker(A|B)$ non cambia se si moltiplica una riga per uno scalare o si somma ad una riga c. lin. delle rimanenti.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$(A|B)y = \underline{0} \Rightarrow \begin{matrix} R_1 y = 0 \\ R_2 y = 0 \\ \vdots \\ R_m y = 0 \end{matrix}$$

osservo che se abbiamo una sol. $y_0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} R_1 y = 0 \\ \vdots \\ R_m y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(R_1 y) = 0 \\ R_2 y = 0 \\ \vdots \\ R_m y = 0 \end{cases} \quad \forall \alpha \neq 0$$

$$(*)\quad \begin{cases} \left(R_1+\sum_{i=2}^{m}\beta_i R_i\right)y=0 \\ R_2 y=0 \\ \vdots \\ R_m y=0 \end{cases}$$

se $\bar{y}$ soluzione di $\begin{matrix} R_2 y=0 \\ \vdots \\ R_m y=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \bar{y}$ soluzione anche di $(*)$ perché sostituendo e $\left(R_1+\sum_{i=2}^{m}\beta_i R_i\right)y=$

$$= R_1 y+\sum_{i=2}^{m}\beta_i R_i y = \underline{0}$$

viceversa: se $\bar{y}$ soluzione di (*) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} R_1\bar{y} + \sum_{i=2}^{m} \beta_i R_i \bar{y} = 0 \\ R_2\bar{y} = 0 \\ \vdots \\ R_m\bar{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1\bar{y} + 0 = 0 \\ R_2\bar{y} = 0 \\ \vdots \\ R_m\bar{y} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{y}$ è soluzione del sistema originario.

conseguenza: $\ker(A|B)$ dipende solamente da $\mathcal{L}(R_1 \dots R_m)$

conseguenza II: le soluzioni di $AX = B$ che sono i vettori $x_1 \dots x_n \in \mathbb{K}^n$

tali che

$(x_1 \dots x_n, -1) \in \mathrm{Ker}(A|B)$

dipendono solo dallo s. vettoriale generato dalle righe di $(A|B)$.

Metodo di Gauss per risolvere i sistemi lineari.

$AX = B$

sistema lineare.

$$(A|B)\begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

lavoriamo sulle righe di $(A|B)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

se tutte le entrate della I colonna sono $=0$ passiamo alla colonna successiva.

ALTRIMENTI SIA a_{1i} la prima entrata non nulla nella colonna che stiamo considerando. Scambiamo la prima riga con la i-esima riga e dividiamola per a_{11} (dopo lo scambio

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

il sistema dato dalla nuova matrice è equiv. a quello di partenza.

per ogni riga ≠ dalla prima sottraiamo $a'_{i1} R'_1$ a tale riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{bmatrix}$$

questo sistema è ancora equiv. a quello di partenza.

stessa cosa su II riga, II colonna.

se $a''_{22} \neq 0$, divido per a''_{22}.

~~a~~ altrimenti scambio la II ~~colonna~~ riga con una

riga ~~colonna~~ j-esima con $j \geq 2$ tale che $a''_{j2} \neq 0$

e poi divido per tale valore

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & a'''_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$ dà un sistema equivalente.

sottraggo da $\forall$ riga $\neq 2$ a'''_{i2} per la II riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \boxed{M} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

Itero fino a che non arrivo ad avere considerato tutte le righe.

A quel punto risolvo il sistema per sostituzione.

$$\begin{cases} \quad y + z = 0 \\ x + 3y + t = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{7}t - \frac{3}{7} = 0 \\ y + \frac{2}{7}t + \frac{1}{7} = 0 \\ z - \frac{2}{7}t - \frac{1}{7} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{7} - \frac{1}{7}t \\ y = -\frac{1}{7} - \frac{2}{7}t \\ z = \frac{1}{7} + \frac{2}{7}t \end{cases}$$

SOLUZIONE.

Studio di un sistema lineare $AX=B$

1) verificare la compatibilità.
2) determinare # soluzioni
3) determinare le soluzioni cercando

SOL PART. + SOLUZIONI SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO.

Esempio di applicazione di un sistema lineare.

Sia data una equazione del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{(a_{12}+a_{21})}{2}xy + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

equazione di II grado in x ed y.

$a = a_{11}$
$b = a_{22}$ $\quad d = a_{13} \quad e = a_{23} \quad f = a_{33}$
$c = \frac{a_{12}+a_{21}}{2}$

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

corrisponde ad una conica del piano cartesiano (affine).

Supponiamo di avere dei punti del piano $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \dots (x_n,y_n)$.

a) per quanti punti in generale passa una e una sola conica.

b) come trovarla.

(a, b, c, d, e, f) sono da trovare $\Rightarrow$ incognite.

$$a x_1^2 + b \cancel{x} y_1^2 + c x_1 y_1 + d x_1 + e y_1 + f = 0$$
$$a x_2^2 + b y_2^2 + \dots = 0$$
$$\vdots$$
$$a x_n^2 + b y_n^2 + \dots = 0$$

$\rightarrow$ sistema lineare in 6 incognite ed n equazioni

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n & \dots & & 1 & 0 \end{array}\right] = (A \vdots B)$$

1) il sistema è omogeneo $\Rightarrow$

$(0 0 \dots 0)$ è sempre soluzione

ma l'eq. $0=0$ non ci interessa.

cerchiamo soluzioni non banali!

soluzioni non banali ci sono se

$$rk(A) = rk(A|B) < n = 6$$

soluzioni non banali ci sono se $\rho(A) \leq 5$.

$\rightarrow$ per 5 punti esiste sempre una conica che li contiene; per 6, bisogna vedere.

$\rightarrow$ supponiamo che sia $rk(A) = 5 \Rightarrow$ ci sono esattamente ∞^1 soluzioni ma queste soluzioni sono tutte proporzionali fra loro!

Equazioni proporzionali hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow \exists!$ conica che contiene i punti.

5 punti tali che $\rho(A)=5$ sono detti in posizione generale.

Altrimenti i punti sono detti dipendenti (rispetto le coniche).

→ Il numero totale di possibili coniche è ∞^5 perché le possibili scelte per

(a, b, c, d, e, f) sono in $\mathbb{K}^6$

ma scelte proporzionali danno eq. proporzionali

e quindi lo stesso insieme di punti.

Lo stesso discorso si può fare con polinomi

in più variabili e di grado ≥ 1.

ALGORITMO: Siano

$$\left.\begin{array}{l}(x_{11} \dots x_{1n}) = \bar{X}_1 \\ \vdots \\ (x_{m1} \dots x_{mn}) = \bar{X}_m\end{array}\right\} \in \mathbb{K}^n$$

dei vettori.

Vogliamo una funzione polinomiale di

grado minimo tale che $f(\bar{X}_1) = \dots = f(\bar{X}_m) = 0$

poniamo $d=1$ e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1n}x_{1n} + a_{1n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \dots + a_{mn}x_{mn} + a_{1n+1} = 0 \end{cases}$$

è risolubile con soluz $\neq \underline{0}$? $(\varrho(A) = \varrho(A|B) < n+1 ?)$

sì $\Rightarrow$ ok

no $\Rightarrow$ continuiamo.

$d \leftarrow d+1$

$a_{11} x_{11}^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots$

possibili equazioni di II grado

→ nella matrice incompleta mettiamo tutti i possibili prodotti

$x_{ij} x_{ik}$

e cerchiamo una soluzione $\neq 0$

→ c'è → fine

non c'è → $d \leftarrow d+1$

e ragioniamo sui cubi:

$x_{ij} x_{ik} x_{ek}$)

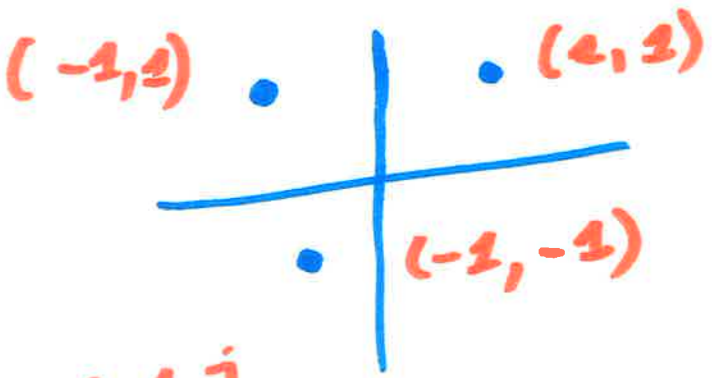
dopo al più n passaggi

$\Rightarrow$ ABBIAMO ~~[illegible]~~ più incognite

che a n equazioni $\Rightarrow$ sicuramente

$\rho(A) < \#$ incognite

$\Rightarrow$ troviamo una soluzione non banale.



$ax+by+c=0$

$a(-1)+b\cdot 1+c=0$

$a(1)+b\,1+c=0$

$a(-1)+b(-1)+c=0$

$\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists!$ soluzione $(a,b,c)=(0\,0\,0)$.

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

$$a\cdot 1+b\cdot 1-c-d+e+f=0$$
$$a\cdot 1+b\cdot 1+c+d+e+f=0$$
$$a\cdot 1+b\cdot 1+c-d-e+f=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & +1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

∞^3 soluzioni

$\Rightarrow \exists$ una conica che contiene i 3 punti dati!