Sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$ Sistema lineare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrice dei coefficienti

o

matrice incompleta del sistema.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ vettore dei termini noti

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ matrice completa del sistema.

Th. (Rouché-Capelli) $AX = B$ compatibile $\iff \rho(A) = \rho(A|B)$.

Un sistema lineare è detto <u>omogeneo</u> se $B = \underline{0}$ ($\forall$ termine noto è 0).

<u>**Teorema:**</u> Le soluzioni di un sistema lineare $AX = B$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n \iff B = \underline{0}$

<u>DIM:</u> 1) Se $B = \underline{0} \Rightarrow \{X \mid AX = \underline{0}\} = \ker f_A$

$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$ ma $\ker f_A \leq \mathbb{K}^n$ ok

2) Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin \{X \mid AX = B\}$ perché $A\underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ l'insieme delle sol. non è s.vett. $\square$

DIM ALTERNATIVA DI 1).

Siano $X, Y \in S$ ove $S = \{X \mid AX = \underline{0}\}$.

$\Rightarrow \alpha AX + \beta AY = \underline{0} \Rightarrow \cancel{AX+A}$

$A(\alpha X + \beta Y) = \underline{0} \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow S \leq \mathbb{K}^n$. $\square$

Sistema lineare omogeneo.

1) $\ker f_A = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ Il nostro sistema lineare ammette una ed una soluzione. (perché f_A è iniettivo) ma $\underline{0}$ è soluzione.

Questo accade $\Leftrightarrow \rho(A) = n$.

per il teorema nullità + rango.

$rk(A) + \dim \ker(A) = n \quad \dim \ker A = 0$

2) $\text{Ker } f_A \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow$ le soluzioni del nostro sistema lineare formano un sott. vettoriale di dim = dim Ker f_A

ma dim Ker $f_A = n - rk(A)$.

In particolare se $|K| = \infty$ il numero di elementi di Ker f_A è infinito.
ma noi possiamo descrivere i suoi elementi formando una base data da $n - rk(A)$ vettori.

$$x + y = 0 \qquad rk(A) = 1$$
$$n - rk(A) = 1$$

$$S = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$S = \operatorname{Ker} f_A$

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x+y \end{cases}$$

$S \leq \mathbb{R}^2$

$S = \mathcal{L}((1,-1))$

$$\begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y = 0 \\ 2x-z = 0 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ B

$rk(A) = 2$

$n = 3$

$\dim S = 3-2 = 1$

$$\begin{cases} x = y \\ 2x - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$x = y$

$z = 2x = 2y.$

$S = \{(y,y,2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1\,1\,2)).$

DICITURA: Si dice che un sistema lineare

$$AX = \underline{0}$$

ha ∞^{n-r} soluzioni se

$\dim S = n - r$ ove S = insieme (sottospazio vett.) delle soluzioni.

In particolare n = # incognite

$r = rk(A) = rk(A|B)$.

OSSERVAZIONE Sia $AX = \underline{0}$ un sistema omogeneo.
Ogni soluzione $\bar{X}$ del sistema con $\bar{X} \neq \underline{0}$ è detta <u>autosoluzione</u> del sistema.

(eigensolution).

Supponiamo ora $B \neq \underline{0}$.

$$(*) \quad AX = B \qquad\qquad S = \{\bar{X} \mid A\bar{X} = B\}.$$

Sappiamo che $S \neq \emptyset \iff rk(A) = rk(A|B)$.

S corrisponde all'insieme di tutte le possibili preimmagini del vettore B rispetto la funzione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Sia ora $\bar{X}$ una di queste preimmagini

$$\Rightarrow \quad S = \{\bar{X} + Z \mid Z \in \ker f_A\}.$$

osserviamo che $\{\bar{X} + Z \mid Z \in \ker f_A\} \subseteq S$

perché $f_A(\bar{X} + Z) = f_A(\bar{X}) + f_A(Z) = f_A(\bar{X}) + \underline{0} =$

$$= f_A(\bar{X}) = B$$

inoltre $S \subseteq \{\bar{x} + z \mid z \in \ker f_A\}$.

perché se $y \in S \Rightarrow y - \bar{x} \in \ker f_A$

~~perché~~ perché $f_A(y - \bar{x}) = f_A(y) - f_A(\bar{x}) = B - B = \underline{0}$

$\Rightarrow y = \bar{x} + (y - \bar{x})$ con $z = (y - \bar{x}) \in \ker f_A$

$= \bar{x} + z \in \{\bar{x} + z \mid z \in \ker f_A\}$.

DIM ALTERNATIVA:

Sia $X = \bar{x} + z$ con $A\bar{X} = B$, $Az = \underline{0}$

$\Rightarrow AX = A(\bar{X} + z) = A\bar{X} + Az = B + \underline{0} = B$.

$\Rightarrow X$ è soluzione.

Viceversa

se $\bar{X}$ soluzione, y soluzione

$Ay = B \qquad A\bar{X} = B$

$\Rightarrow \; A(y-\bar{X}) = Ay - A\bar{X} = B - B = \underline{0}$

$\Rightarrow \; y-\bar{X} = z$ é soluzione di $AX = \underline{0}$

ma $y = (y-\bar{X}) + \bar{X} = \bar{X} + z$ $\square$.

Supponiamo di avere un sistema lineare

$$(*) \begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = -1 + x + y = -1 + 2x \end{cases}$$

$S = \{ (x, x, -1+2x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$

$$S = (0\ 0\ -1) + \{(x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= (0\ 0\ -1) + \mathcal{L}((1\ 1\ 2))$$

soluzione particolare del sistema

soluzioni del sistema $AX = \underline{0}$ detto sistema omogeneo associato.

soluzioni che si possono descrivere mediante una base di $\mathrm{Ker}\, f_A$.

<u>**N.B**</u> c'è una biiezione fra gli elementi di S e gli elementi di $\mathrm{Ker}\, f_A$

Def: Diciamo che un sistema lineare $AX=B$ compatibile ha $\boxed{\infty^{n-r}}$ soluzioni se $n-r = \dim \ker f_A = \text{null}(A) = n - rk(A)$.

Un sistema lineare ha ∞^{n-r} soluzioni se è compatibile e il sistema omogeneo associato ha come soluzioni un sott. vettoriale di dimensione $n-r$.

OSS: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile. e sia S l'insieme delle sue soluzioni. Allora

$$\dim(S) = \begin{cases} \dim \ker f_A & \text{se } B = \underline{0} \\ \dim \ker f_A + 1 & \text{se } B \neq \underline{0} \end{cases}$$

Se $B = \underline{0} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = S = \ker f_A \Rightarrow$

$\dim \mathcal{L}(S) = \dim \ker f_A$.

Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\overline{X} + \ker f_A) =$

$= \mathcal{L}(\overline{X}, \ker f_A) = \mathcal{L}(\overline{X}) \oplus \ker f_A$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S) = 1 + \dim \ker f_A$.

<u>N.B</u>: Se $\overline{X}$ soluzione di $AX = B$ con $B \neq \underline{0}$
$\Rightarrow \overline{X} \notin \ker f_A$. In particolare $\overline{X}$ è lin. indip. rispetto i vettori di ~~[illegible]~~ una base di $\ker f_A$

<u>N.B</u>: Se $AX = B$ è incompatibile (cioè $S = \emptyset$)
$\Rightarrow \mathcal{L}(S) = \{\underline{0}\}$ e $\dim \mathcal{L}(S) = 0$.

INCOMPATIBILE $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$

$\rho(A)=1 \quad \rho(A|B)=2$

incompatibile.

$\Rightarrow S=\emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$ e $\dim \mathcal{L}(S)=0.$

$\ker f_A = \mathcal{L}((1,-1))$. $\dim \ker f_A = 1$

COMPATIBILE $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ $S=(1,0)+\mathcal{L}((1,-1))$

$\dim \mathcal{L}(S) = \dim \mathcal{L}((1,0),(1,-1))$

$= 2 = \dim \ker f_A + 1.$

DIM. ALTERNATIVA DI R/C.

$AX = B$ e scriviamo la matrice A per colonne

$$\left({}^{T}C_1 \ {}^{T}C_2 \ \dots \ {}^{T}C_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

$$\parallel$$

$$x_1\,{}^{T}C_1 + x_2\,{}^{T}C_2 + \dots + x_n\,{}^{T}C_n = B$$

soluzione esiste $\Leftrightarrow$ B è c. lineare di ${}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n$

$\Leftrightarrow$ $B \in \mathcal{L}({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n)$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ B è linearmente dip. da ${}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n$

ovvero $\mathcal{L}({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n\, B) = \mathcal{L}({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n)$

ma $\mathcal{L}({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n) \subseteq \mathcal{L}({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n\ B)$

quindi i 2 sp. vettoriali coincidono

$\Leftrightarrow$ hanno la stessa dimensione

ed essi hanno la stessa dim

(per Kronecker) $\Leftrightarrow \rho({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n) =$

$= \rho({}^{T}C_1 \dots {}^{T}C_n\ B)$ $\square$

Risoluzione di sistemi lineari.

- Supponiamo di avere un sist. lineare di n eq. in n incognite con $rk(A) = n$.

$$AX = B \qquad \text{con} \quad \det(A) \neq 0$$

$\Rightarrow$ A è invertibile $\Rightarrow$

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) =$$
$$= A^{-1}B$$

(sistema di Cramer)

In particolare $\exists!$ soluzione. perchè $\ker f_A = \{0\}$.

Se ce ne fossero 2 $\Rightarrow$

$$AX = B = AY$$

$$X = A^{-1}AX = A^{-1}B = A^{-1}AY = Y. \ ↯$$

• Sistema lineare compatibile di m equazioni in n incognite con $rk(A) = rk(A|B) = m \leq n$

$$AX = B \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \boxed{M} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

poiché $rk(A) = m$ massimo, la matrice A contiene sicuramente un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$.

prendiamo tutte le incognite che <u>non</u> corrispondono alle colonne di M e portiamo i corrispondenti termini a dx dell'uguale.

$$\begin{bmatrix} {}^{T}C_1 & {}^{T}C_2 & \boxed{M} & {}^{T}C_6 & {}^{T}C_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} = B$$

$$x_1 {}^{T}C_1 + x_2 {}^{T}C_2 + M \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + x_6 {}^{T}C_6 + x_7 {}^{T}C_7 = B$$

$$M\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B - x_1^T C_1 - x_2^T C_2 - x_6^T C_6 - x_7^T C_7$$

sistema nelle 3 incognite x_3, x_4, x_5

e nei 4 parametri x_1 x_2, x_6 x_7

con $\det(M) \neq 0$.

↓

risolvo come se fosse un sistema di Cramer.

→ ottengo $\infty^{7-3} = \infty^{4}$ soluzioni.

Le incognite che diventano parametri sono

$n - rk(M) = n - rk(A)$.

Dire che un sistema lineare ha ∞^{n-r} soluzioni significa anche dire che le sue soluzioni dipendono da $n-r$ parametri.

- Supponiamo $AX=B$ compatibile, m equazioni, n incognite

$$\rho(A)=\rho(A|B)=r \leq m.$$

$$\begin{bmatrix} \quad \boxed{M} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

Def: Due sistemi lineari compatibili $AX=B$ e $A'X=B'$ sono detti equivalenti se essi hanno le medesime soluzioni. (in particolare devono avere lo stesso numero di incognite)

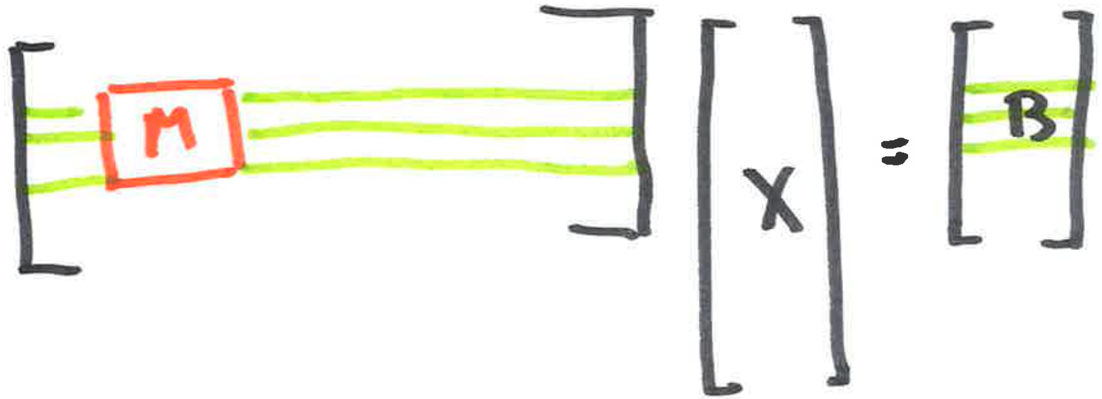
Teorema: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile.
Sia M un minore di ordine massimo contenuto in A con $\det(M)\neq 0$.
e sia A' la matrice ottenuta da A tenendo le sole righe intercettate da M e B' il corrispondente sottovettore di B $\Rightarrow$ i sistemi lineari

$$AX=B$$

e

$$A'X=B'$$

sono equivalenti.



DIM: Si ragiona sullo sp. vettoriale delle righe della matrice completa $(A|B)$.

OSSERVIAMO INNANZI TUTTO CHE SE $\overline{X}$ È SOLUZIONE DI $AX=B \Rightarrow$ SARÀ ANCHE SOLUZIONE DI $A'X=B'$ PERCHÉ OGNI EQUAZIONE DI $A'X=B'$ C'È ANCHE IN $AX=B$.

Se S' = soluzioni di $A'X=B'$

S = soluzioni di $AX=B$

abbiamo $S \subseteq S'$.

consideriamo $$[A \mid B]\begin{bmatrix}\bar{X}\\-1\end{bmatrix}$$

ed osserviamo che se R é una riga di $[A \mid B]$ che sta anche in $[A' \mid B']$

$$\Rightarrow R\begin{bmatrix}\bar{X}\\-1\end{bmatrix} = 0$$

se R_i é una riga di $A \mid B$ che non sta in $[A' \mid B'] \Rightarrow R_i$ é comb. lineare delle righe $(R'_1 \dots R'_k)$ di $[A' \mid B'] \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_k : \quad R = \alpha_1 R'_1 + \dots + \alpha_k R'_k \Rightarrow$

Viceversa: supponiamo $\bar{X}$ soluzione di $A'X = B'$

SAPPIAMO CHE LE RIGHE DI $(A|B)$ SONO C. LINEARE DELLE RIGHE DI $(A'|B')$

PERCHÉ $\rho(A) = \rho(A|B) = \rho(A') = \rho(A'|B')$ visto CHE IL SISTEMA È COMPATIBILE.

$$(A'|B')\begin{bmatrix} \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} = \cancel{B} \; \underline{0}$$

$$(a'_{11} \dots a'_{1n} \; b'_1)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{a'_{11}\bar{x}_1 + \dots + a'_{1n}\bar{x}_n}_{= b'_1} - b'_1 = 0$$

$\forall$ riga di A'.

$$\Rightarrow \quad R_i \begin{bmatrix} \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} = (\alpha_1 R'_1 + \dots + \alpha_k R'_k) \begin{bmatrix} \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 R'_1 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_k R'_k \begin{bmatrix} \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= 0$$

cioé $\quad (a_{i1} \dots a_{in} \; b) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n - b = 0$$

$$a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n = b.$$

cioé $\bar{X}$ soddisfa tutte le eq. del sistema di partenza

$\Rightarrow \bar{X}$ è soluzione di $AX = B$

$\Rightarrow \quad S' \subseteq S$

$\Rightarrow S = S'$

$\square$