OSS 1) Si dimostra che $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (\det A_{ij}) \cdot a_{ij}$$

A_{ij} := matrice ottenuta da A cancellando i-esima riga j-esima colonna.

I teorema di Laplace

DIM: Verifichiamo che la formula data soddisfa gli assiomi 1-4 di determinante

→ poiché di funzioni di questo tipo ∃!

⇒ essa deve essere il determinante. $\square$

2) Si dimostra anche che $\det({}^tA) = \det(A)$.

$\forall i, j$: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$

per righe

per colonne.

<u>N.B</u>: Supponiamo di avere una matrice A $n \times n$

→ quante operazioni per calcolare $\det(A)$?

Con Laplace $O(n!)$

infatti per calcolare $\det(A)$ serve calcolare

n determinanti di matrici A_{ij} che sono $(n-1)\times(n-1)$.

per ognuna di queste $(n-1)$ determinanti di matrici $(n-2)\times(n-2)$ etc. etc.

$O(n!)$ DETERMINANTI.

Con Gauss $O(n^2)$

$$\rightarrow A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow R_1 \\ \leftarrow R_2 \\ \\ \leftarrow R_n \end{array} \end{array} \quad \text{righe}$$

$d = 1$

Se $a_{11} = 0$ e ogni entrata $a_{j1} = 0 \Rightarrow \det A = 0$ FINE.

Se $a_{11} = 0$ e $\exists j > 1$ con $a_{j1} \neq 0 \Rightarrow$

scambio la riga j con la riga 1
e pongo $d \leftarrow (-1)d$.

1) DIVIDIAMO LA PRIMA RIGA PER a_{11}
e poniamo $d \leftarrow a_{11} \cdot d$.

$$S = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & a_{12} \cdot a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n} a_{11}^{-1} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow R_1' \\ \leftarrow R_2' \\ \\ \leftarrow R_n' \end{array}$$

$\det(S) = a_{11}^{-1} \det(A)$

2) Ad ogni riga j successiva la prima sottraggo
la prima riga moltiplicata per a_{1j}

T

$$T = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_2' - a_{21} R_1' \\ \vdots \\ R_n' - a_{n1} R_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n} a_{11}^{-1} \\ 0 & & & \\ 0 & & A'' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

osserviamo che $\det(T) = \det A''$

restituiamo come risultato $d \cdot \det(A'')$.

BISOGNA CALCOLARE n determinanti e per ogni determinante bisogna calcolare n prodotti (quando sottraiamo le righe).

$< O(n^2)$.

Teorema: Siano $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ n vettori di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ essi sono una base di $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice che li ha per righe (o colonne) è $\neq 0$.

Teorema: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V_n(\mathbb{K})$ e sia $\mathcal{B}$ una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ dello stesso.

Allora $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ sono una base di $V_n(\mathbb{K})$ $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice che ha come righe le loro componenti rispetto a $\mathcal{B}$ è $\neq 0$.

DIM: mostriamo che se det della matrice

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \text{ libera}$$

Siano $\overline{v}_1 = v_{11}\overline{e}_1 + \dots + v_{1n}\overline{e}_n$

$\overline{v}_2 = v_{21}\overline{e}_1 + \dots + v_{2n}\overline{e}_n$

$\vdots$

$\overline{v}_n = v_{n1}\overline{e}_1 + \dots + v_{nn}\overline{e}_n$

e poniamo

$$A = \begin{array}{cl} \left[\begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \leftarrow R_1 \\ \\ \leftarrow R_n \end{matrix} \end{array}.$$

Consideriamo una c. lineare

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \dots + \alpha_n\overline{v}_n = \underline{0}$$

I coeff. del vettore $\overline{w} = \alpha_1\overline{v}_1 + \dots + \alpha_n\overline{v}_n$

sono proprio $\alpha_1(\alpha$ $\cancel{\alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{21}}$ +

dati da $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_n R_n$.

Quindi: se $\exists$ una c. lineare delle righe di A a coeff. non tutti 0 che dà $(\underline{0}, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \exists$ una c. lineare dei ~~coeff~~ vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ con coeff. non tutti nulli che dà $\underline{0}$.

$\Rightarrow$ i vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ sono liberi

$\Leftrightarrow$

le righe $R_1 \dots R_n$ sono libere

$\square$

coeff. comb. lineare $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$ = coeff. c. lineare $\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_n R_n$

Esercizio:

verificare se i vettori:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

sono liberi in $\mathbb{R}^{2,2}$.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

SCRIVIAMO LA MATRICE CHE HA PER RIGHE LE LORO COMPONENTI RISPETTO $\mathcal{B}$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

SONO LEGATI!

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ +1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

LIBERI

pb. se volessimo verificare che una sequenza di $m < n$ vettori è libera come possiamo fare?

Teorema: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ dei vettori di $V_n(\mathbb{K})$ $k \leq n$
e $\mathcal{B}$ una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$.
Allora posto

$$\bar{v}_1 = v_{11}\bar{e}_1 + \dots + v_{1n}\bar{e}_n$$
$$\bar{v}_2 = v_{21}\bar{e}_1 + \dots + v_{2n}\bar{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\bar{v}_k = v_{k1}\bar{e}_1 + \dots + v_{kn}\bar{e}_n$$

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

Abbiamo che i vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ sono liberi
$\iff$ la matrice A contiene una sottomatrice
$k \times k$ (= minore $k \times k$) con det $\neq 0$.

DIM: Sia $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ la seq. di vettori data.
Se essa è legata $\Rightarrow \exists\, \bar{v}_i$ combinazione
lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ la i-esima riga di
A è c. lineare delle rimanenti.
$\Rightarrow$ ogni sottomatrice che contiene tutte le righe di A
ed è $k \times k$ ha det $= 0$.

Se $k = n \Rightarrow$ GIÀ VISTO $\rightarrow$ FINE.

Se $k < n \Rightarrow$ possiamo usare il teorema di completamento della base e aggiungere ad S $(n-k)$ vettori di $\mathcal{B}$.

$$S' = (\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k\ \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}}}_{n \text{ vettori}})$$

scriviamo la matrice associata alle componenti dei vettori di S'

$$A' = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \\ 0\ 0\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 1\ 0\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$= A$

$\leftarrow$ componenti di $\bar{e}_{i_j}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Il vettore delle componenti di un vettore $\bar{e}_{i_j} \in \mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ è il vettore $(0\,0 \dots 1\,0 \dots 0)$

$\uparrow$ in posizione i_j

$$A' = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & & & \\ v_{k2} & v_{k1} & \cdots & v_{kn} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppiamo con Laplace $\det(A')$ rispetto l'ultima riga

$\Rightarrow \det A' = \pm \det A''$

ove A'' si ottiene da A' cancellando l'ultima riga e la colonna i_{n-k}

Iteriamo su tutte le righe aggiunte

Dopo $n-k$ passaggi abbiamo

$\det A' = \pm \det M$ ove M é ottenuta da A' cancellando $n-k$ righe (le ultime!) e $(n-k)$ colonne. In particolare M é un minore di A di dim $k \times k$.

Se i vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ sono liberi $\Rightarrow S'$ base

$\Rightarrow \det A' \neq 0 \Rightarrow \det M \neq 0$ $\square$

liberi in $\mathbb{R}^6$?

$$\det\begin{bmatrix} (1\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0) \\ (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0) \\ (0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0) \\ (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) \\ (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0) \\ (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1) \end{bmatrix} = \pm\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \pm\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \pm\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

ok

LIBERI

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice
Si dice rango di A l'ordine del più grande minore M contenuto in A $k \times k$ tale che $\det(M) \neq 0$.

$$\boxed{rk(A) = \rho(A) = \max\{k \mid \exists M \in \mathbb{K}^{k,k},\ \det(M) \neq 0 \text{ e } M \text{ contenuto in } A\}}.$$

OSS: Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\rho(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ dim della copertura lineare delle righe (colonne) di A è n.

Se $A \in \mathbb{K}^{k,n}$ e $\rho(A) = k \Rightarrow$ A contiene un minore $k \times k$ con $\det \neq 0 \Rightarrow$ le righe di A sono un sistema libero $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ dim della copertura lineare dello spazio delle righe $= k = \rho(A)$ $\square$

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow \rho(A) = \dim \mathcal{L}(R)$
$= \dim \mathcal{L}(C)$

ove R = seq. delle righe di A

C = seq. delle colonne di A.