Una sequenza di vettori $S=(\bar{s}_1 \dots \bar{s}_n)$ è legata

$\iff$ almeno uno dei suoi vettori è combinazione lineare dei rimanenti.

Teorema (metodo degli scarti successivi)

Sia S una sequenza di vettori di $V(\mathbb{K})$ e supponiamo $S=(\bar{s}_1 \dots \bar{s}_n)$ LEGATA.

Allora $\exists\ \bar{s}_i \in S$ tale che $\boxed{\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{s}_i\})}$

Se S sequenza legata $\Rightarrow$ si può sempre scartare un vettore di S ed ottenere una sequenza che genera il medesimo sottospazio vettoriale.

$\searrow$ Una sequenza legata non è mai un insieme minimale di generatori.

<u>DIM</u> $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legato $\Rightarrow$ ALMENO UNO DEI VETTORI DI S è C.LINEARE DEI RIMANENTI.

Supponiamo sia $\boxed{\bar{v}_1 = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \bar{v}_j}$

Consideriamo $\mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{v}_i \;\middle|\; \substack{\bar{v}_i \in S \\ \beta_i \in \mathbb{K}} \right\} =$

$$= \left\{ \beta_1 \bar{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \bar{v}_i \;\middle|\; \beta_i \in \mathbb{K}, \bar{v}_i \in S \right\} =$$

$$= \left\{ \beta_1 \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \bar{v}_j + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \bar{v}_i \;\middle|\; \beta_i \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=2}^{n} (\beta_1 \alpha_j + \beta_j) \bar{v}_j \;\middle|\; \beta_i \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_1\})$$

$\square$

In $\mathbb{R}^3$: la sequenza

$$\{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,1\,1), \cancel{(1\,1\,1)}, (2\,2\,2)\}$$

genera $\mathbb{R}^3$

$$(1\,1\,1) = (1\,0\,0) + (0\,1\,1)$$

$$\{(1\,0\,0), (0\,1\,0), \cancel{(0\,1\,1)}, (2\,2\,2)) \text{ genera } \mathbb{R}^3$$

$$(0\,1\,1) = \frac{1}{2}(2\,2\,2) - (1\,0\,0)$$

$$((1\,0\,0), (0\,1\,0), (2\,2\,2)) \text{ genera } \mathbb{R}^3$$

MA QUESTA SEQUENZA È LIBERA

$$\alpha(1\,0\,0)+\beta(0\,1\,0)+\gamma(2\,2\,2)=(0\,0\,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+2\gamma=0\\ \beta+2\gamma=0\\ 2\gamma=0\end{cases} \qquad \begin{matrix}\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\end{matrix} \qquad \Rightarrow \underline{\text{LIBERA}}$$

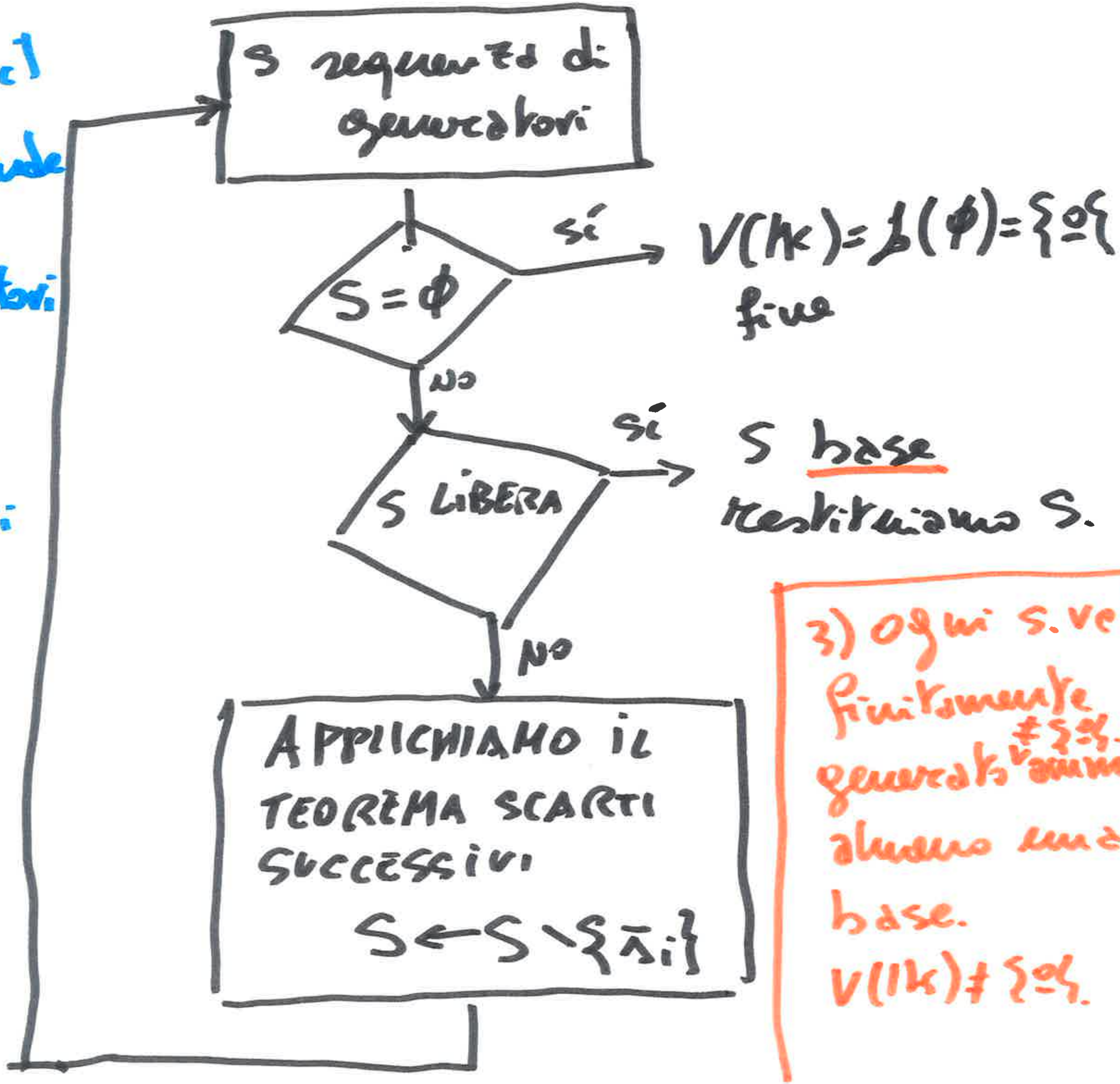
Sia $S=(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una sequenza di generatori per uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ finita ~~generato~~

Allora o $V(\mathbb{K})=\{\underline{0}\}$ oppure $\exists\, S' \subseteq S$ sottosequenza di S libera che genera S.

→ Data una sequenza di generatori finita di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ non banale $\exists$ sempre una BASE di $V(\mathbb{K})$ contenuta in essa.

1) in generale il risultato dipende da come si scelgono i vettori ma vedremo che il numero finale di vettori è sempre lo stesso per uno fissato sp. vett.

2) Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$ $\Rightarrow S = (\underline{0}, \dots \underline{0})$ l'ALG. CONTINUA fino a che $S = \emptyset$.



3) ogni s. vett. finitamente generato $\neq \{\underline{0}\}$ ammette almeno una base.
$V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\}$.

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{Q}$ = campo razionale

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Teorema: Ogni spazio vettoriale non banale ammette base (supposto l'assioma della scelta)

$\Downarrow$

$\exists$ un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ tale che ogni numero reale si scrive in modo unico come comb. lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$ a coeff in $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}[x]$ di tutti i polinomi a coeff. in $\mathbb{R}$ visto su $\mathbb{R}$.

NON È FINITAMENTE GENERATO

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3 \dots x^n \dots)$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$ $\quad V(\mathbb{K}) \neq \{0\}$

SISTEMI/SEQUENZE DI GENERATORI $\geq$ SEQUENZE LIBERE

IN GENERALE POSSIAMO ESTRARRE DA UNA SEQ DI GENERATORI UNA BASE DELLO SP. VETTORIALE → TOGLIENDO VETTORI

OSS: 1) Se ad una sequenza di generatori si aggiungono vettori allora si ottiene ancora una seq. di generatori

2) Se ad una sequenza libera si tolgono vettori allora si ottiene ancora una seq. libera.

3) È possibile togliere in modo opportuno vettori ad una sequenza di generatori di modo da ottenere $\emptyset$ oppure una seq. libera di generatori.

1) Sia $S = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n)$ di generatori e $S' = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n, \bar{h}_1 \dots)$

$$\Rightarrow \forall \bar{x} \in V(\mathbb{K})\ \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : \quad \alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n = \bar{x}$$

$$\parallel$$

$$\alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n + 0 h_1 + \dots + 0 h_m + \dots$$

e quindi $\mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S \cup \{\bar{h}_1 \dots \}) =$

$$= \mathcal{L}(S) = V(\mathbb{K}).$$

2) Supponiamo $S = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ libera

e sia $S' \subseteq S$ $\quad S' = (\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_k})$

Se S' fosse legata $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k$ tali che

$(\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq (0 0 \dots 0)$ e

$$\alpha_1 \bar{e}_{i_1} + \dots + \alpha_k \bar{e}_{i_k} = \underline{0}$$

$$\| $$

$$\alpha_1 \bar{e}_{i_1} + \dots \alpha_k \bar{e}_{i_k} + 0 \sum_{l \notin \{i_1 \dots i_k\}} e_l$$

$\Rightarrow (\beta_1 \dots \beta_n) = (0\, 0 \dots \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}\, 0 \dots 0)$

è un vettore di coeff. non tutti nulli con cui $\exists$ una c. lineare di vettori di S che dà $\underline{0}$ $\Rightarrow$ S legata ↯ ASSURDO. $\square$

Lemma di Steinitz:

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato e siano

$A = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$ una sequenza libera di vettori di V

$B = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ una sequenza di generatori di V.

ALLORA $m \leq n$.

CONSEGUENZA FONDAMENTALE:

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di $V(\mathbb{K})$ (f.g.) $\neq \{\underline{0}\}$

Allora $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ e tale numero è detto dimensione di $V(\mathbb{K})$. $\dim(V) = |\mathcal{B}|$

Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim\{\underline{0}\} = 0$.

DIM: prendiamo $\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ come seq. libera} \\ \mathcal{B}' \text{ come seq. di gen}\end{array}\right] \Rightarrow |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$

VICEVERSA prendiamo $\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}' \text{ come seq. libera} \\ \mathcal{B} \text{ come seq. di gen}\end{array}\right] \Rightarrow |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$

$\Rightarrow |\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|$

$\square$

<u>DIM</u> per assurdo.

Hp (1) supponiamo $m > n$ cioè che $\exists$ una sequenza libera con più vettori di una sequenza di generatori

Ts (2) MOSTRIAMO CHE LA SEQUENZA LIBERA DOVREBBE ESSERE LEGATA $\lightning$

(3) CONTRADDIZIONE $\Rightarrow$ DEVE ESSERE VERA LA NEGAZIONE DI (1) $\Rightarrow$ DEVE ESSERE VERO $m \leq n$.

$A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \, \bar{v}_{n+1} \dots \bar{v}_m]$ LIBERA

$B = B_0 = [\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n]$ GENERATORI

poiché B di generatori $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che

$$\bar{v}_1 = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n$$

MA DEVE ESSERE $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq \underline{0}$ perché ALTRIMENTI $\bar{v}_1 = \underline{0} \Rightarrow A$ non sarebbe libera

SUPPONIAMO WLOG (~~wlog~~ without loss of generality = senza perdere in generalità) $\alpha_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{w}_1 = \bar{v}_1 - (\alpha_2 \bar{w}_2 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n)$$

poiché $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\overline{w}_1 = \alpha_1^{-1} (\overline{v}_1 - (\alpha_2 \overline{w}_2 \dots + \alpha_n w_n))$$

cioè $\overline{w}_1 \in \mathcal{L}(\overline{v}_1, \overline{w}_2, \dots \overline{w}_n)$

<u>ASSERTO</u>: $B_1 = [\overline{v}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n]$ è una seq. di generatori

OSSERVIAMO CHE se $\overline{x} \in \mathcal{L}(B_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{x} = \gamma_1 \overline{w}_1 + \gamma_2 \overline{w}_2 + \dots + \gamma_n \overline{w}_n =$$

$$= \gamma_1 (\alpha_1^{-1} (\overline{v}_1 - (\alpha_2 \overline{w}_2 + \dots + \alpha_n \overline{w}_n)) + \gamma_2 \overline{w}_2$$

$$+ \dots + \gamma_n \overline{w}_n =$$

$$\gamma_1 \alpha_1^{-1} \bar{v}_1 + (\gamma_2 - \gamma_1 \alpha_1^{-1} \alpha_2) \bar{w}_2 +$$

$$+ (\gamma_3 - \gamma_1 \alpha_1^{-1} \alpha_3) \bar{w}_3 +$$

$$\dots$$

$$+ (\gamma_n - \gamma_1 \alpha_1^{-1} \alpha_n) \bar{w}_n \in \mathcal{L}(B_1)$$

$$\mathcal{L}(B_0) \subseteq \mathcal{L}(B_1)$$

$$\bar{y} \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \exists \delta_1 \dots \delta_n : \bar{y} = \delta_1 \bar{v}_1 + \delta_2 \bar{w}_2 + \dots + \delta_n \bar{w}_n$$

$$= \delta_1 (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) + \delta_2 \bar{w}_2 +$$

$$+ \dots + \delta_n \bar{w}_n =$$

$$= \delta_1 \alpha_1 \bar{w}_1 + (\delta_2 + \delta_1 \alpha_2) \bar{w}_2 + \dots + (\delta_n + \delta_1 \alpha_n) \bar{w}_n$$

$\in \mathcal{L}(B_0)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(B_0) = \mathcal{L}(B_1)$

$A = [\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\ \bar{w}_{n+1} \dots \bar{v}_m]$

$B_0 = [\bar{w}_1\ \bar{w}_2 \dots \bar{w}_n]$

$B_1 = [\bar{v}_1\ \bar{w}_2 \dots \bar{w}_n]$

A e B_1 sono libere e di generatori

$\bar{v}_2 \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \exists (\beta_1', \alpha_2' \dots \alpha_n') \in \mathbb{K}^n$

con $\bar{v}_2 = \beta_1' \bar{v}_1 + \alpha_2' \bar{w}_2 + \dots + \alpha_n' \bar{w}_n$

poiché A è libera non può essere $\bar{v}_2 = \beta_1' \bar{v}_1$

quindi $(\alpha_2' \dots \alpha_n') \in \mathbb{K}^{n-1}$ è diverso da $(0\ 0 \dots 0)$.

WLOG $\alpha_2' \neq 0 \Rightarrow$

$$\bar{w}_2 = \alpha_2'^{-1}(\bar{v}_2 - \beta_1'\bar{v}_1 - (\alpha_3'\bar{w}_3 + \dots \alpha_n'\bar{w}_n))$$

$$B_2 = [\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{w}_3 \dots \bar{w}_n]$$

per lo stesso ragionamento di prima

$$\mathcal{L}(B_2) = \mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B_0)$$

quindi B_2 è di generatori.

CONTINUIAMO COSÌ PER n VOLTE.

$\bar{v}_3 \in \mathcal{L}(B_2)$

$\bar{v}_3 = \beta_1''\bar{v}_1 + \beta_2''\bar{v}_2 + \alpha_3''\bar{w}_3 + \dots$

$\cancel{\exists}$ con $(\alpha_3'' \dots \alpha_n'') \neq (0 0 \dots 0)$

perché altrimenti $\bar{v}_3 \in \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$

ed A non sarebbe libera.

WLOG $\alpha_3'' \neq 0$.

$\vdots$

$B_3 = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3 \ \bar{w}_4 \dots \bar{w}_n]$

Iterando arriviamo a.

$$A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \, \bar{v}_{n+1} \dots \bar{v}_m]$$

$$B_0 = [\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n]$$

$$B_1 = [\bar{v}_1 \bar{w}_2 \dots \bar{w}_n]$$

$$\vdots$$

$$B_n = [\bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n] \subset A$$

B_n è una sequenza di generatori contenuta in A e formata da $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$.

$\Rightarrow \bar{v}_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n)$ cioè $\bar{v}_{n+1}$ è combinazione lineare dei primi n vettori di A

$\Rightarrow A$ deve essere legata $\lightning$ <u>ASSURDO</u>

pertanto è falso $m > n$

NE SEGUE $m \leq n$. $\square$

CONSEGUENZE: sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vett. finitamente generato e non banale.

1) OGNI DUE BASI DI $V(\mathbb{K})$ HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI $= n = \dim V(\mathbb{K})$.

2) OGNI SEQUENZA DI $m > n$ VETTORI È LEGATA.

3) NESSUNA SEQUENZA DI $m < n$ VETTORI È DI GENERATORI

4) UNA SEQUENZA LIBERA DI n VETTORI È DI GENERATORI E QUINDI BASE

5) UNA SEQUENZA DI n GENERATORI È LIBERA

$((100), (010), (111), (011))$

$((010), (110), (111), (011), (001), (010))$

$(100) = (111) - (011)$

$((010), (110)\ (100)\ (011)\ (001)\ (010))$

$((010)\ (110)\ (100)\ (011)\ (001)\ (010))$

$(111) = (110) + (001)$

$((010)\ (111)\ (100)\ (011)\ (001)\ (010))$

$X = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n)$

$X \subseteq V(\mathbb{K})$ di generatori

$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(X) = V$

$\Leftrightarrow \quad \forall \bar{v} \in V : \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n :$

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n \qquad \bar{g}_i \in X$

X di generatori per $V(\mathbb{K})$ $\Leftrightarrow$

ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere come c. lineare di ~~di~~ un numero finito di elementi di X

$\mathbb{R}^3$

$X = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1))$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(X)$ infatti

$\forall \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) + \gamma(0\,0\,1) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$X' = ((1\,1\,0), (0\,-1\,0), (0\,0\,1), (1\,2\,3))$

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

(*) $(\alpha, \beta, \gamma) = x(1\,1\,0) + y(0\,-1\,0) + z(0\,0\,1) + t(1\,2\,3)$

$$\begin{cases} x + t = \alpha \\ x - y + 2t = \beta \\ z + 3t = \gamma \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha - t \\ y &= x + 2t - \beta = \alpha + t - \beta \\ z &= \gamma - 3t \end{aligned}$$

$\forall (\alpha, \beta, \gamma)\ \exists\ (x, y, z, t)$

tale che $(\alpha, \beta, \gamma) = \dots$ (*)