$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$\mathbb{C}$ campo complesso $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ é algebricamente chiuso.

$$x^2 + 1 = 0$$

Su $\mathbb{C}$ esiste una operazione detta coniugio

$$\bar{\ } : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ a + ib \rightarrow a - ib \end{cases}$$

Un elemento $z \in \mathbb{C}$ é reale (quindi $b = 0$)

$\Leftrightarrow$ $z = \bar{z}$

il coniugio è un <u>automorfismo</u> di $\mathbb{C}$

cioè

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$$

"preserva le operazioni di somma e prodotto."

→ si comporta "bene" rispetto i polinomi.

Se $\mathbb{K}$ è un campo indico con $\mathbb{K}[x]$ o $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ l'anello di tutti i polinomi nella indeterminata x a coeff. in $\mathbb{K}$.

con le operazioni di somma e prodotto di polinomi.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \Rightarrow$$

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$f(x) = 2 + 5x + 3x^2 \quad \in \mathbb{R}[x]$$

$$g(x) = 1 + 3x + 0 \cdot x^2$$

$$(f+g)(x) = 3 + 8x + 3x^2$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{i=0}^{2n} \Big(\sum_{j+k=i} a_j b_k \Big) x^i$$

$\approx n^2$ operazioni

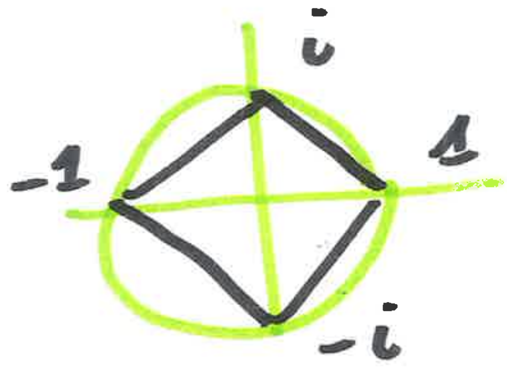
$$(f \cdot g)(x) = (2 \cdot 1)x^0 + (5 \cdot 1 + 3 \cdot 2)x^1 + (3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3)x^2 + (3 \cdot 3 + 0 \cdot 5)x^3 + (3 \cdot 0)x^4$$

$$= 2 + 11x + 18x^2 + 9x^3$$

radici $2n$-esime di 1

$$\left\{ e^{2\pi i/(2n)} \mid i = 0 \dots 2n \right\}$$

$$\omega_{2n} := e^{2\pi i/(2n)}$$



$$\omega_n = e^{2\pi i/n}$$

radice primitiva n-esima di 1

$f(\omega^i)$ $\quad i = 0 \dots 2n$

$g(\omega^i)$

$(f \cdot g)(\omega^i) = f(\omega^i) \cdot g(\omega^i)$

$2n$ operazioni

Teorema: Siano $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio ed $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ campo) $\Rightarrow$

$\exists\, g(x) \in \mathbb{K}[x] : \deg g(x) < \deg f(x)$ e

$$f(x) = g(x)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

Teorema: Siano $f(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg f(x), h(x) \leq n$

$\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ distinti.

Se $\forall\, i = 1, \dots, n$, $f(\alpha_i) = h(\alpha_i) \Rightarrow f(x) = h(x)$

<u>Teorema</u>: Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ allora il polinomio $f(x)$ si fattorizza in $\mathbb{R}[x]$ in termini di primo e secondo grado.

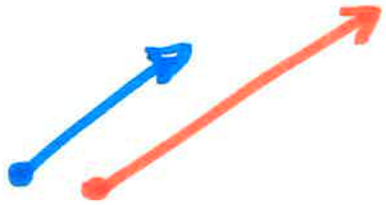
DIMOSTRATO LAVORANDO IN $\mathbb{C}[x]$

Spazi vettoriali

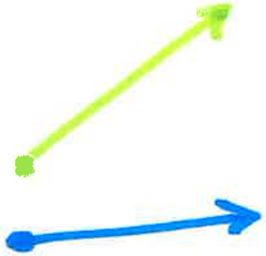
vettore

freccia. - segmento orientato

oggetto che possiede ed è identificato dall'avere lunghezze diverse



direzioni diverse



versi differenti

1) una <u>lunghezza</u>
2) una direzione
3) un verso.

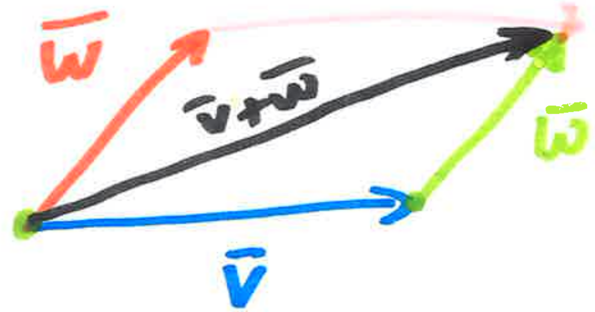
OPERAZIONI

1) "scalare un vettore"

→ DATO un $\alpha > 0$ ed un vettore $\bar{v} = \nearrow$ di lunghezza ℓ

calcolare/determinare il vettore $\alpha\bar{v} = \nearrow$ di lunghezza $\alpha\ell$ e con stessa direzione e verso di $\bar{v}$. (prodotto per scalare).

2) sommare 2 vettori.



legge parallelogramma

→ la somma dà luogo ad una struttura di gruppo abeliano.

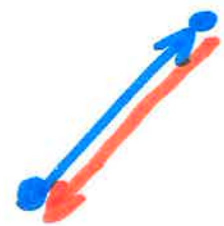
$\bar{v}+\bar{w} = \bar{w}+\bar{v}$

$\bar{v}+\underline{0} = \underline{0}+\bar{v} = \bar{v}$

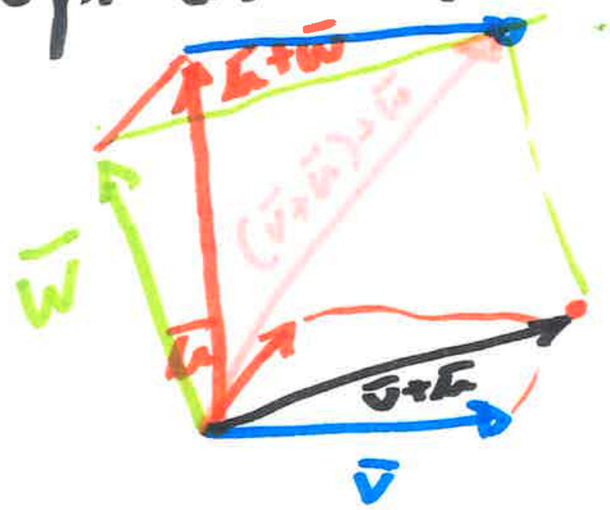
$\underline{0}$ = vett. di lunghezza nulla.

dato $\bar{v}$ se prendete il vettore $-\bar{v}$ che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e verso opposto ottenete $\underline{0}$

ogni el. ammette inverso.



vale la prop. associativa $(\bar{v}+\bar{u})+\bar{w} = \bar{v}+(\bar{u}+\bar{w})$.



vale

3) osserviamo che possiamo definire con $\alpha < 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \bar{v}$ come il vettore

con la stessa direzione di $\bar{v}$, verso opposto e lunghezza $|\alpha| \cdot \ell$ ove ℓ = lunghezza di $\bar{v}$.

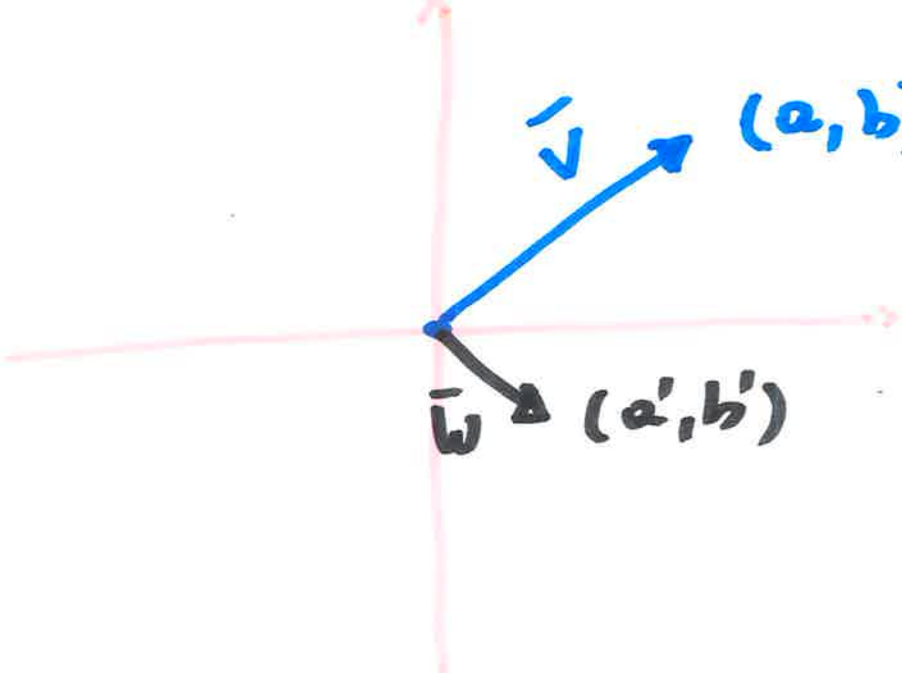
- In questo modo abbiamo una "candidata" struttura algebrica

$(V, \hat{+}, \hat{\cdot})$ $\quad \hat{\cdot} : \mathbb{R} \times V \to V$

vettori $\quad$ somma di vettori $\quad$ prodotto per scalare

$\alpha \geq 0 \quad \alpha \hat{\cdot} \bar{v}$ = vettore con stessa dir. stesso verso e lungh. $\alpha \cdot \ell$ con ℓ lunghezza di $\bar{v}$

$\alpha < 0 \quad \Rightarrow \alpha \hat{\cdot} \bar{v} = |\alpha|(-\bar{v})$ = vettore con stessa dir, verso opposto e lunghezza $|\alpha| \cdot \ell$ la lunghezza di $\bar{v}$.



$(a,b) \neq (a',b')$
$\Rightarrow \bar{v} \neq \bar{w}$

Siano $\bar{v}, \bar{w}$ due vettori con le stesse coordinate $\Rightarrow$ $\bar{v} = \bar{w}$

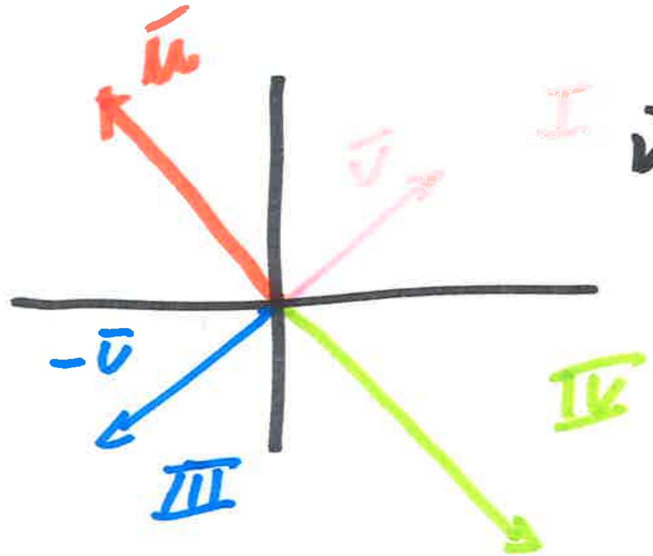
$(a^2+b^2) = (a'^2+b'^2)$ stessa lung.

$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ verso dato dal se

$a \geq 0 \quad b \geq 0$ ovvero $a \geq 0 \quad b \leq 0$

oppure

$a \leq 0 \quad b \leq 0$ $\qquad$ $a \leq 0 \quad b \geq 0$



$\bar{v} = (a,b)$

$(-a,-b) =$

viceversa: sia (a,b) una coppia di numeri reali

$\Rightarrow$ costruiamo la freccia di origine $(0,0)$ e punta (a,b)

CORRISPONDENZA 1-1 FRA VETTORI EL ELEMENTI DI $\mathbb{R}^2$

→ COORDINATIZZAZIONE.

1) Sia $\bar{v}$ un vettore ed $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \quad \bar{v} = (a, b) \qquad \|\bar{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{w} = (\alpha a, \alpha b) \qquad \|w\| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} =$

$= |\alpha|\sqrt{a^2+b^2} =$

$= |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$

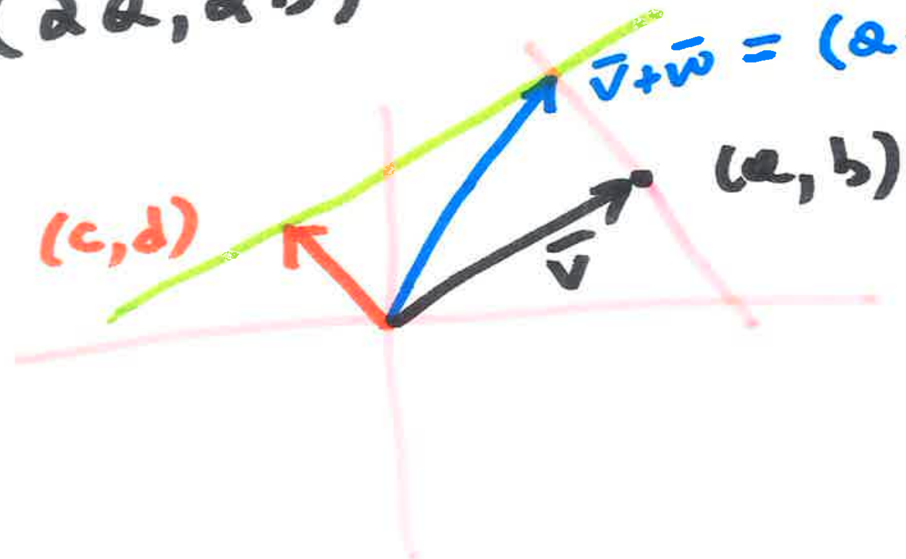
2) $\dfrac{\alpha b}{\alpha a} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$ la direzione di $\bar{w}$ é la stessa della dir. di $\bar{v}$.

3) se $\alpha < 0 \Rightarrow$ il verso di $\bar{w}$ é l'opposto del verso di $\bar{v}$

se $\alpha > 0 \Rightarrow$ il verso di $\bar{w}$ é lo stesso del verso di $\bar{v}$.

$$\bar{v} = (a, b)$$
$$\downarrow$$
$$(\alpha a, \alpha b) = \alpha \cdot \bar{v}$$

$\bar{v} + \bar{w} = (a+c, b+d)$



Tracciare per (c,d) la retta di coeff. angolare $\frac{b}{a}$

Tracciare per (a,b) la retta di coeff. angolare $\frac{d}{c}$

$\rightarrow$ intersecarle $\Longrightarrow$ punto $(a+c, b+d)$

$$\bar{v} = (a,b) \qquad \bar{v}+\bar{w} = (a+c, b+d)$$

$$\bar{w} = (c,d)$$

$$(\mathbb{R}^2, \hat{+}, \hat{\cdot}) \qquad +: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) \to (a+c, b+d) \end{cases}$$

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \alpha, (a,b) \to (\alpha a, \alpha b). \end{cases}$$

è uno spazio vettoriale.

MOSTRIAMO CHE LA SOMMA DI VETTORI.
È ASSOCIATIVA

$\bar{u} = (a, b)$

$\bar{v} = (c, d)$

$\bar{w} = (e, f)$

$$\cancel{\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (a, b)}$$

$$\cancel{(a, b) + (c + d, e + f))} =$$

$$= \cancel{(a + (c + d), b + (e + f))} =$$

$$= \cancel{((a + c) + d, (b + e) + f)} =$$

$$= \cancel{(a + c, b + d) + (e, f)} =$$

$\bar{u} = (a, b)$
$\bar{v} = (c, d)$
$\bar{w} = (e, f)$

$$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) =$$

$$= (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big) =$$

$$= (a, b) + (c+e, d+f) =$$

$$= \big(a + (c+e), b + (d+f)\big) =$$

$$= \big((a+c)+e, (b+d)+f\big) =$$

$$= (a+c, b+d) + (e, f) =$$

$$= \big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) =$$

$$= (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \qquad \square$$

$$\bar{u} + (0,0) = (a,b)+(0,0) = (a+0,b+0) = \bar{u}$$

$(0,0) = \underline{0}$ vettore nullo

$\bar{u} = (a,b)$ $\quad -\bar{u} = (-a,-b)$

$$\bar{u} + (-\bar{u}) = (a-a,\, b-b) = (0,0).$$

⌜S. vettoriale (di dimensione finita) → si può rappresentare mediante n-uple di elementi di un campo $\mathbb{K}$ e le operazioni di somma componente per componente e prodotto per scalare per componenti.⌟

Def: Sia $\mathbb{K}$ un campo.

Si dice <u>spazio vettoriale</u> sul campo $\mathbb{K}$ una struttura algebrica $V(\mathbb{K}) =$

$$(V, \hat{+} : V \times V \to V, \hat{\cdot} : \mathbb{K} \times V \to V)$$

tale che

1) $(V, \hat{+})$ é un gruppo abeliano.

2) $\hat{\cdot} : \mathbb{K} \times V \to V$ é detto prodotto per scalare e soddisfa queste proprietà:

a) $\forall \bar{v} \in V : 1_{\mathbb{K}} \hat{\cdot} \bar{v} = \bar{v}$

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad (\alpha + \beta) \hat{\cdot} \bar{v} = \alpha \hat{\cdot} \bar{v} \hat{+} \beta \hat{\cdot} \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall \bar{v} \in V$: $(\alpha \beta) \cdot \hat{v} = \alpha \hat{\cdot} (\beta \hat{\cdot} \bar{v})$.

d) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall \bar{v}, \bar{w} \in V$: $\alpha \hat{\cdot} (\hat{v} \hat{+} \bar{w}) =$
$\alpha \hat{\cdot} \bar{v} \hat{+} \alpha \hat{\cdot} \bar{w}$.

2a è detta unitarietà

2b e 2d) sono dette pseudo-distributive

2c è detta pseudo-associativa.

gli elementi di V sono detti vettori

gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti scalari

Consideriamo $\mathbb{K}^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$.

con $\mathbb{K}$ campo.

Definiamo

$$\hat{+} \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (a_1 a_2 \dots a_n), (b_1 \dots b_n) \rightarrow (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n) \end{cases}$$

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \lambda, (a_1 \dots a_n) \longrightarrow (\lambda a_1 \dots \lambda a_n) \end{cases}$$

prodotto e somma
componente per componente

$\Rightarrow \mathbb{K}^n$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.