$n=2$

$\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ conica è una curva algebrica reale (piana) del II ordine.

$$\{[(x_1, x_2, x_3)] \mid q(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

ove $q(x_1, x_2, x_3) := (x_1\ x_2\ x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

ed A matrice reale e simmetrica non nulla.

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

$n=3$ $\quad \mathbb{P}^3\mathbb{C}$

Definiamo come superficie algebrica il luogo dei punti di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ ~~che~~ le cui coordinate soddisfano una equazione omogenea non banale in $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$.

$F(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ polinomio omogeneo di grado $t>0$ in $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$.

$$\tilde{V}(F) = \{[(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)] \mid F(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0\}.$$

Esempio $\quad (a_1\ a_2\ a_3\ a_4) \neq \underline{0}$

$$F(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$

$\tilde{V}(F)$ è un piano.

Teoremi dell'ordine (per sup. algebriche).

Sia F un polinomio omogeneo in $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ e $\tilde{V}(F)$ la corrispondente sup. algebrica. $\deg F = n$

Allora

I) Una retta r_0 di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ interseca $\tilde{V}(F)$ in esattamente n punti a meno che non sia $r_0 \subseteq \tilde{V}(F)$.

II) Un piano π di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ interseca $\tilde{V}(F)$ in una curva di ordine n a meno che il piano non sia componente di $\tilde{V}(F)$.

DIM: Uguale (o quasi) alla dim. del teorema dell'ordine nel piano.

__Def__: Si dice quadrica una sup. algebrica reale del II ordine.

$\tilde{V}(F)$ ove $F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) =$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 +$$
$$+ a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 +$$
$$+ a_{44}x_4^2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Oss: Sia $\tilde{V}(F)$ una sup. algebrica.

Si dice che $P \in \tilde{V}(F)$ è un punto ~~doppio~~ multiplo (t-uplo) per $\tilde{V}(F)$ se ogni retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno t-volte ~~e che esistono rette~~ ed esiste una retta che interseca $\tilde{V}(F)$ in P esattamente t-volte.

→ Un punto t-uplo con $t > 1$ è detto punto multiplo (o anche punto singolare).

Teorema: Un punto P è multiplo per $\tilde{V}(F)$ se

$$\nabla|_P F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\Big|_P = \underline{0} \;\&\; F(P) = 0$$

Teorema: Un punto P é multiplo per una quadrica di eq. ${}^tXAX=0 \iff$ $\iff AP=\underline{0}$ cioé $P\in \ker(A)$.

Def: Una quadrica é detta

- <u>generale</u> se $\ker(A)=\{\underline{0}\}$
  non ha punti doppi.
- <u>singolare</u> se $\ker(A)\neq\{\underline{0}\}$.
  ci sono punti doppi.
- <u>riducibile</u> se $\exists$ G,H polinomi di I grado omogenei tali che
  $$\tilde{V}(F)=\tilde{V}(G)\cup\tilde{V}(H)$$
  $$\Rightarrow F=GH.$$

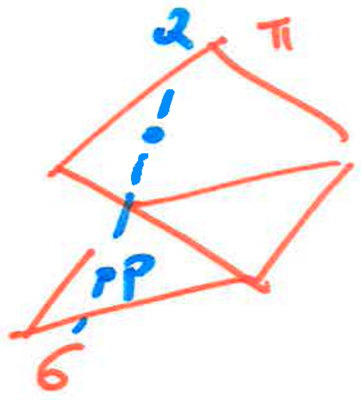
OSS: Una quadrica è riducibile $\iff$ ha ∞^1 punti doppi.
(in particolare, se $rk(A)=3 \Rightarrow$ la quadrica è singolare ma non è riducibile).

Se una quadrica è riducibile $\iff F = GH$
e la quadrica $\tilde{V}(F)$ è unione di 2 piani
$\pi = \tilde{V}(F)$ e $\sigma = \tilde{V}(H)$
poiché siamo in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ due piani si intersecano sempre in una retta oppure sono coincidenti.

DIMOSTRIAMO CHE $\forall P \in \pi \cap \sigma$ deve essere doppio.
Infatti sia $P \in \pi \cap \sigma$ e sia Q un altro punto della quadrica $\Rightarrow$ la retta PQ è ~~ancora~~ contenuta

in π oppure in σ $\Rightarrow$ questo vuol dire che interseca la quadrica almeno 3 volte $\Rightarrow$ questa retta deve intersecare in P almeno 2 volte $\Rightarrow$ P è doppio.

OSSERVIAMO CHE IN GENERALE I PUNTI DOPPI SONO SOLO QUELLI DI $\pi \cap \sigma$ in questo caso

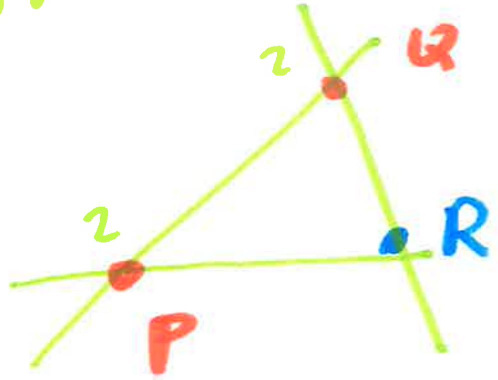


Infatti se $\pi \neq \sigma$ siano $P \in \pi \setminus \sigma$, $Q \in \sigma \setminus \pi$ la retta (PQ) interseca $\pi \cup \sigma$ solo in P e Q $\Rightarrow$ P e Q sono entrambi punti semplici.

Viceversa: Supponiamo $\mathcal{Q}$ quadrica con almeno 2 punti doppi

P, Q punti doppi

Sia $R \in \mathcal{Q} \setminus (PQ)$



considero le rette $(PQ) \to 4$ int. $\Rightarrow (PQ) \subseteq \mathcal{Q}$

$(PR) \to 3$ int $\Rightarrow (PR) \subseteq \mathcal{Q}$

$(QR) \to 3$ int $\Rightarrow (QR) \subseteq \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ il piano π che contiene P, Q, R interseca la quadrica $\mathcal{Q}$ in almeno una curva di ordine 3 (l'unione delle 3 rette) $\Rightarrow \pi$ è componente della quadrica $\square$

N.B: Dalla dim segue che tutti i punti della retta (PQ) devono essere doppi $\Rightarrow$ [2 pti doppi $\Rightarrow \exists\, \infty^1$ punti doppi].

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA DELLE QUADRICHE.

1) $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$

A matrice reale e simmetrica.

DIAGONALIZZARE (cambiando riferimento).

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. 4 autovalori.

$m_a(0) = 0 \rightarrow rk(A) = 4 \rightarrow$ quadrica generale

$m_a(0) = 1 \rightarrow rk(A) = 3 \rightarrow \exists!$ punto doppio

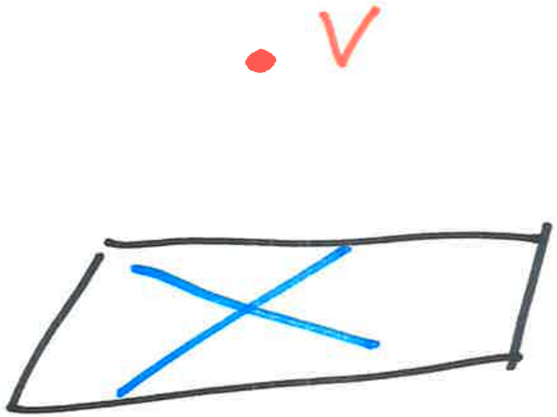
$m_a(0) = 2 \rightarrow rk(A) = 2 \rightarrow \exists\, \infty^1$ punti doppi

$Q = \pi \cup \sigma$ con $\pi \neq \sigma$

$m_a(0) = 3 \rightarrow rk(A) = 1$

$\hookrightarrow \exists\, \infty^2$ punti doppi $\Rightarrow Q = \pi^2$

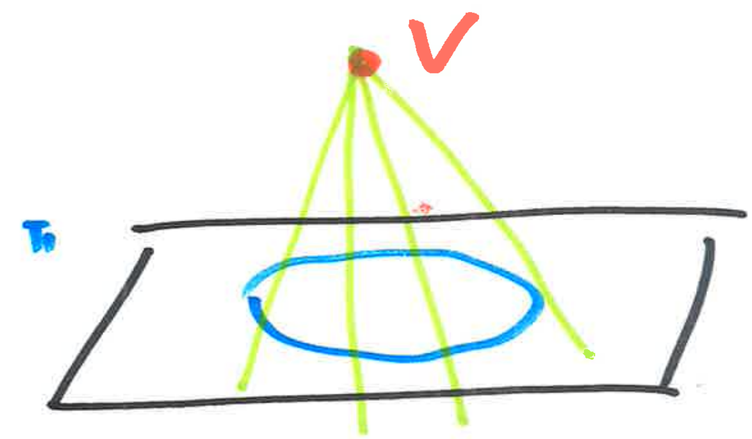
N.B.: Quando $rk(A)=3$ $\exists!$ punto doppio V



Sia π un piano che non passa per V.

$\Rightarrow$ π interseca la quadrica in una conica non singolare.

Infatti se $\pi \cap Q$ fosse unione di 2 rette $\Rightarrow \pi \cap Q = r \cup s$ e $\forall P \in r \cup s$ la retta (VP) intersecherebbe Q almeno 3 volte e sarebbe contenuta in $Q \Rightarrow Q$ sarebbe l'unione dei 2 piani $\langle r, V \rangle$ e $\langle s, V \rangle$ e quindi riducibile e con $\geq \infty^1$ punti doppi.



$Q \cap \pi = \mathcal{C}$

$Q \cap \pi$ conica generale. Ogni retta per V ed un punto di $\mathcal{C}$ interseca Q almeno 3 volte $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ è contenuta. D'altro canto se un punto R appartiene a Q ed è diverso da V, la retta VR deve essere contenuta e tale retta interseca π in un punto di $Q \cap \pi = \mathcal{C}$.

La quadrica Q é unione di tutte le rette che passano per V e per un punto della conica $\mathcal{C}$ che sta su di un piano π che non contiene V.

→ cono di vertice V e direttrice $\mathcal{C}$ (se V punto proprio)

cilindro di vertice V e direttrice $\mathcal{C}$ (se V punto improprio).

- $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ cerchiamo una classificazione "reale".

A ha autovalori $(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$ reali

→ consideriamo i segni.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & + \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ quadrica eq. a $\alpha x_4^2 = 0$

  riducibile in 2 piani reali e coincidenti.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & + & + \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ quadrica eq. a $\alpha^2 x_3^2 + \beta^2 x_4^2 = 0$

  $$(\alpha x_3 + i\beta x_4)(\alpha x_3 - i\beta x_4) = 0$$

  riducibile in 2 piani immaginari e coniugati.
  I suoi punti reali sono tutti e soli i punti doppi int. dei 2 piani.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ quadrica eq. a $\alpha^2 x_3^2 - \beta^2 x_4^2 = 0$

  $$(\alpha x_3 + \beta x_4)(\alpha x_3 - \beta x_4) = 0$$

  riducibile in 2 piani reali e distinti.

- $(0\ +\ +\ +)$
  $(0\ -\ -\ -)$ $\rightarrow$ $\alpha^2 x_2^2 + \beta^2 x_3^2 + \gamma^2 x_4^2 = 0$

  la quadrica è un cono a falda immaginaria $\Rightarrow$ il suo unico punto reale è il vertice $[(1\,0\,0\,0)]$

- $(0\ +\ +\ -)$
- $(0\ -\ -\ +)$ $\rightarrow$ $\alpha^2 x_2^2 + \beta^2 x_3^2 - \gamma^2 x_4^2 = 0$

  in questo caso la conica $Q \cap [x_1 = 0]$ ha punti reali

  $\rightarrow$ cono a falda reale.

QUADRICHE GENERALI.

- $(++++)$
  $(----)$

$$\alpha^2x_1^2+\beta^2x_2^2+\gamma^2x_3^2+\delta^2x_4^2=0$$

NON CI SONO PUNTI REALI

- $(+++-)$
  $(---+)$

$$\alpha^2x_1^2+\beta^2x_2^2+\gamma^2x_3^2-\delta^2x_4^2=0$$

- $(++--)$
  $(--++)$

$$\alpha^2x_1^2-\beta^2x_2^2+\gamma^2x_3^2-\delta^2x_4^2=0$$

<u>OSS</u> $P=[(\beta,\alpha,0,0)]\in Q$

$Q=[(0,0,\delta,\gamma)]\in Q$.

Consideriamo la retta (PQ)

questa retta é interamente contenuta nella quadrica.

Similmente anche $[(\beta,-\alpha,0,0)]\in Q$.

$[(0,0,\delta,-\gamma)]\in Q$

$\Rightarrow$ la nostra quadrica Q contiene rette.

Se P è un qualsiasi punto della quadrica $\Rightarrow$ il piano tg. alla quadrica in P

$^tPAX=0$ interseca la quadrica Q in 2 rette reali e distinte per P.

$^tPAP=0$

$$\begin{cases} ^tXAX=0 \\ ^tPAX=0 \end{cases}$$

sia Q e quadrica intersecata

$^tPAX=0$

$\Rightarrow$ $^tPAQ=0$

$^tPAP=0$ $\quad$ $^tQAQ=0$

In particolare

$$ {}^{t}(\alpha P+\beta Q)A(\alpha P+\beta Q) = $$

$$ = \alpha^2 \underbrace{{}^{t}PAP}_{=0} + \beta^2 \underbrace{{}^{t}QAQ}_{=0} + \underbrace{2\alpha\beta\, {}^{t}PAQ}_{\Downarrow\ Q\in {}^{t}PAX.} = 0 $$

1) se prendo un punto $P \in Q$ e calcolo il pn. tg. in P la conica $\pi \cap Q$ è riducibile.

2) Se prendo il punto

$\cancel{(1, 1, 0, 0)}$

$(\beta, \alpha, 0, 0)$ e considero

il suo piano tg. ottengo

che questo piano tg interseca

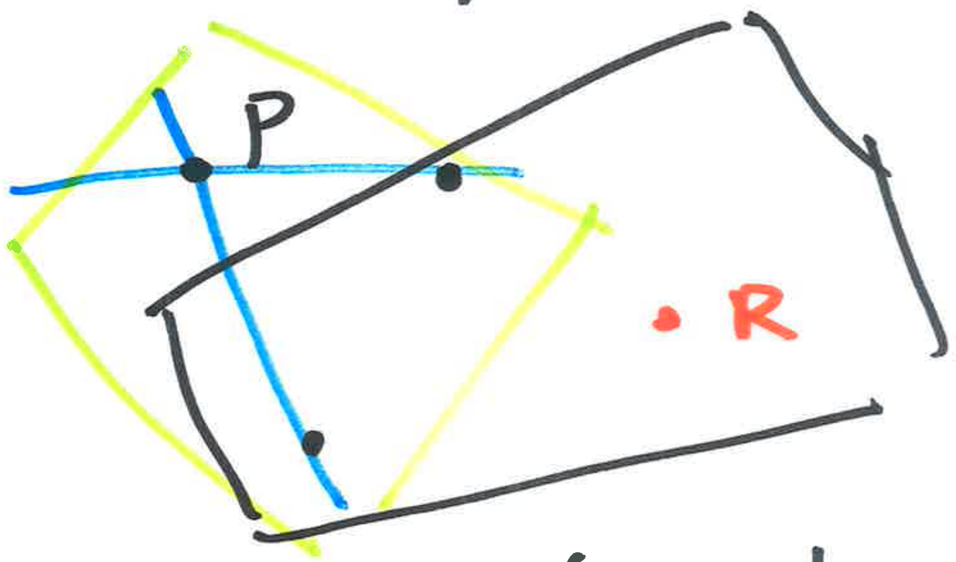
la quadrica almeno nel punto

$[(0, 0, \delta, \gamma)]$ e nel punto $[(0, 0, -\delta, \gamma)]$

$\Rightarrow$ la conica $P \cap \pi$ si spezza in 2

rette reali e distinte per P.

3) Sia ora R un altro punto reale di $\mathcal{Q}$ ~~nel piano~~ e supponiamo che R non stia nel piano tg a $\mathcal{Q}$ in P



osserviamo che il pn. tg. in R a $\mathcal{Q}$ interseca il piano tg. a $\mathcal{Q}$ in P in 2 punti $\neq P$ S_1, S_2 $\Rightarrow$ le rette S_1R e S_2R devono essere contenute in $\mathcal{Q}$

perché S_1, R ed S_2 non possono essere allineati (se lo fossero $(S_1, R, S_2) \subseteq Q$ ma per ipotesi le rette del pn. tg in P a Q in P passano entrambe per P e P non appartiene al pn. tg in R).

$\Rightarrow$ ci sono 2 rette in Q passanti per R.

4) Si applica il ragionamento a tutti i punti di Q.

<u>DEF</u>: Sia Q una quadrica generale.
Si dice che Q é iperbolica se $\forall P \in Q$ ci sono esattamente 2 rette di Q

passanti per P.

ABBIAMO VERIFICATO: Q iperbolica se (e solo se) gli autovalori della matrice sono $(++--)$ o $(--++)$.

$(+++-)$

$(---+)$

$$\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_2^2 + \gamma^2 x_3^2 + \delta^2 x_4^2 = 0$$

$P = [(\beta, \alpha, 0, 0)]$

Intersechiamo la quadrica con il piano tg. per P.

Si ottiene che l'intersezione è una conica con seg. $(++0)$ o $(--0)$ cioè una conica che si spezza in 2 rette imm. e coniugate.

Dim. Come prima si dimostra che se $\exists$ un punto con questa proprietà in Q $\Rightarrow$ ogni punto di Q gode della medesima proprietà (cioè il pn. tg interseca Q in 2 rette imm. e coniugate).

Def: Una quadrica generale è detta Ellittica $\Leftrightarrow$ il piano tg. in un suo qualsiasi punto la interseca in 2 rette imm. e coniugate) $\Leftrightarrow$ $(+++-)$
$(---+)$.

- QUADRICHE
  - GENERALI
    - ellittiche $(+++-)$
    - iperboliche $(++--)$
  - SINGOLARI
    - IRRIDUCIBILI
      - CONI $(+++0)$
      - CILINDRI $(++-0)$
    - RIDUCIBILI
      - 2 pn reali ≠ $(+-00)$
      - 2 pn imm conj $(++00)$
      - 1 pn reale 2 volte $(+000)$

CLASSIFICAZIONE AFFINE → BISOGNA VEDERE LE INTERSEZIONI CON $[x_n = 0]$

(NON SI USANO DIR GLI AUTOVALORI).

A : matrice quadrica

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (x_1\, x_2\, x_3)\, A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

AUTOVALORI A^*

- $(+ + -)$, → ci sono pti impropri e l'intersezione con il pn. improprio è una conica generale ⇒ IPERBOLOIDE
- $(+ - 0)$ / $(+ + 0)$ * PARABOLOIDE
- $(+ + +)$ / $(- - -)$ → NON CI SONO PUNTI IMPROPRI → ELLISSOIDE

* la conica inf. con $x_4 = 0$ è degenere in 2 rette imm. coniugate o reali e distinte

A	A^*	
$(++++)$ $(----)$	// //	quadrica priva di punti reali.
$(+++-)$ $(---+)$	$(+++)/(---)$	ELLISSOIDE (a pti ELLITTICI)
	$(++-)/(--+)$	IPERBOLOIDE ELLITTICO
	$(++0)/(--0)$	PARABOLOIDE ELLITTICO
$(++--)$ $(--++)$	$(++-)/(--+)$	IPERBOLOIDE IPERBOLICO
	$(+-0)$	PARABOLOIDE IPERBOLICO
$(+++0)/(---0)$	$\longrightarrow$	cono/cilindro a falda imm.
$(++-0)/(--+0)$		cono/cilindro a falda reale.

$(++00) / (--00)$ → 2 piani imm. e coniugati

$(+-00) / (-+00)$ → 2 piani reali e distinti

$(+000) / (-000)$ → 1 piano reale 2 volte.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1) $rk(A)$

- 4 : quadrica generale
- 3 : singolare irriducibile
  - $\det A^* = 0$ CILINDRO
  - $\det A^* \neq 0$ CONO
- 2 : riducibile in 2 piani
  - $(+ + 0\, 0)$ immaginari coniugati
  - $(+ - 0\, 0)$ reali e distinti
- 1 : riducibile in un piano contato 2 volte $(+ 0\, 0\, 0)$.

2) Quadrica generale.

$(+ + + +) \rightarrow$ priva di punti reali

$(+ + + -) \rightarrow$ a punti ellittici (ellittica)

$(+ + - -) \rightarrow$ a punti iperbolici (iperbolica).

IN TERMINI DI A^* $\longrightarrow$

- $(+ + +)$ ELLISSOIDE
- $(+ + -)$ IPERBOLOIDE
- $(+ + 0)$ PARABOLOIDE (ellittico)
- $(+ - 0)$ PARABOLOIDE (iperbolico).

3) Singolare irriducibile

- $\det A^* \neq 0$ – CONO
  - $(+ + +)$ a falda immaginaria
  - $(+ + -)$ a falda reale
- $\det A^* = 0$ – CILINDRO
  - $(+ + 0)$ ELLITTICO
  - $(+ - 0)$ IPERBOLICO
  - $(+ 0\, 0)$ PARABOLICO.