# CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE GENERALI

$$\begin{cases} {}^{T}XAX = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1, x_2)\, A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

con $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

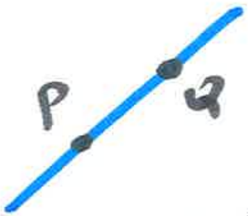
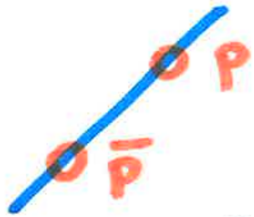
OSSERVIAMO CHE $A^*$ INDUCE SULLA RETTA $x_3 = 0$ UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA.

$A^* \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ perché se $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

avremmo una conica riducibile.

STUDIAMO LA SEGNATURA DI $A^*$ = segni degli autovalori.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

| | | |
|---|---|---|
| $+\ 0$ <br> $-\ 0$ | $+\ -$ <br> $-\ +$ | $+\ +$ <br> $-\ -$ |
|  |  |  |
| $\begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} \alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} \alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ |
| $[(0\ 1\ 0)]$ | $[(\beta, \alpha, 0)]$ <br> $[(\beta, -\alpha, 0)]$ | $[(\beta, i\alpha, 0)]$ <br> $[(\beta, -i\alpha, 0)]$ |
| 1 pto contato 2 volte | 2 pti reali e ≠ | 2 punti imm. coniugati. |
| $\det A^* = 0$ | $\det A^* < 0$ | $\det A^* > 0$ |
| PARABOLA | IPERBOLE | ELLISSE |

Def: 1) Si dice parabola ogni conica generale tangente la retta impropria = con un punto sulla retta impropria reale contato 2 volte.

2) Si dice ellisse ogni conica generale che interseca la retta impropria in 2 punti immaginari e coniugati.

3) Si dice circonferenza ogni ellisse che passa per i punti ciclici $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$.

4) Si dice iperbole ogni conica generale che interseca la retta impropria in 2 punti reali e distinti.

5) Sia $\mathcal{C}$ una conica generale. Si dice centro di $\mathcal{C}$ il punto $C$, polo della retta impropria.

6) Si dice diametro di $\mathcal{C}$ ogni polare di un punto improprio (= retta che passa per il centro).

7) Si dice asse di $\mathcal{C}$ ogni diametro che é ortogonale al proprio polo.

8) Si dice vertice di $\mathcal{C}$ ogni intersezione di $\mathcal{C}$ con un asse.

9) Si dice che $\mathcal{C}$ é a centro se il centro di $\mathcal{C}$ é un punto proprio ($\Rightarrow \mathcal{C}$ é ellisse o iperbole).

10) Si dice <u>asintoto</u> di $\mathscr{C}$ ogni tangente propria a $\mathscr{C}$ in un suo punto improprio (oss: solo ellissi e iperboli hanno asintoti perché nel caso della parabola la tg nel punto improprio è la retta impropria).

11) Si dicono <u>fuochi</u> di $\mathscr{C}$ le intersezioni proprie delle tangenti a $\mathscr{C}$ condotte per i punti ciclici del piano.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

Se $\mathcal{C}$ è una parabola $\Rightarrow$ il suo centro è $\mathcal{C} \cap [x_3 = 0]$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

$$x_1 = \frac{-a_{12}}{a_{11}} \qquad \cancel{x_2} = \quad \cancel{x} + \frac{a_{12}^2}{a_{11}} - 2\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$\cancel{x_2}$$

$$\frac{a_{12}^2}{a_{11}}\left(1 - 2x_2 + x_2^2\right) \Rightarrow x_2 = 1$$

$[(-a_{12}, a_{11}, 0)]$ <u>centro</u>.

Se $\mathcal{C}$ é a centro $\Rightarrow$ per trovare il centro calcolo le polari dei punti $[(1\,0\,0)]$ e $[(0\,1\,0)]$ e le interseco.

$$\begin{cases} (1\,0\,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \\ (0\,1\,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \end{cases}$$

$rk(\text{sistema})=2.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\mathcal{C}$ conica Teorema: 1) Una parabola ha esattamente 1 asse ed 1 vertice

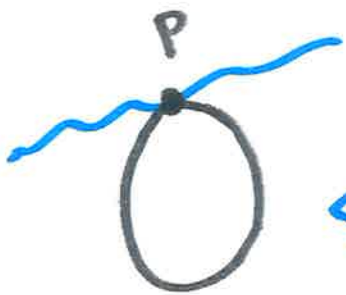
~~2) Una conica a centro ha 2 assi~~

2) ogni diametro di una circonferenza

è un asse.

3) Una conica a centro che non è una circonferenza ha 2 assi e 4 vertici. Tali assi sono ortogonali fra loro.

(N.B. Se la conica è una ellisse ⇒ 4 vertici reali; se è una iperbole ⇒ 2 vertici reali e 2 imm. coniugati).




__DIM:__ Sia $\mathcal{C}$ una parabola e sia $P = [(-a_{12}, a_{11}, 0)]$ il suo centro

⇒ un asse è una retta il cui polo deve essere ortogonale a $P$ (in quanto $\forall$ diametro è parallelo) ⇒ ~~an~~ $[(-a_{12}\ a_{11}\ 0)] = P$

polo A dell'asse deve essere $[(a_{11}\ a_{12}\ 0)]$

Eq. asse. $[(a_{11}\ a_{12}\ 0)]A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.$

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro.

$$[(l,m,0)]A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\underbrace{la_{11}+ma_{12}}_{\text{coeff di } x_1}\ \ \underbrace{la_{12}+ma_{22}}_{\text{coeff. di } x_2}\ \ la_{13}+ma_{23}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \ell a_{11}+m a_{12} & \ell a_{12}+m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell m (a_{11}-a_{22}) + m^2 a_{12} - \ell^2 a_{12} = 0 \quad (*)$$

equazione assi.

Supponiamo $\mathcal{C}$ sia una circonferenza $\Rightarrow$

$a_{11}=a_{22}$ & $a_{12}=0$ $\Rightarrow$ l'equazione $(*)$

è sempre soddisfatta ed ogni diametro è

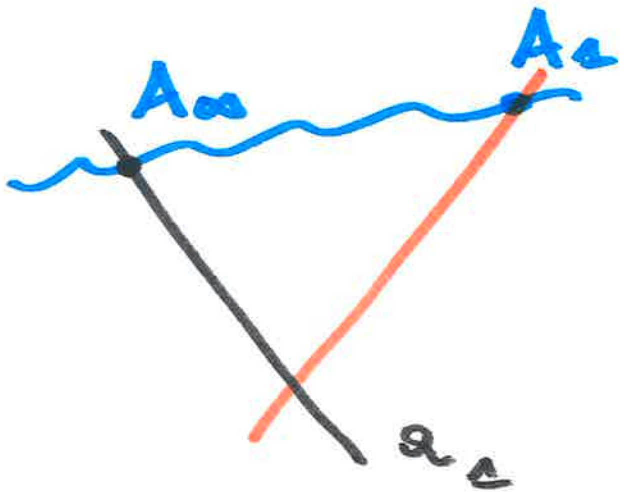
un asse.

ALTRIMENTI (*) HA GRADO 2 ⇒ ammette 2 soluzioni (a meno di proporzionalità).
→ di assi ce ne sono 2.

$$\xi = \frac{\ell}{m} \rightarrow \frac{\ell m}{m^2}(a_{11} - a_{22}) + \frac{m^2}{m^2} a_{12} - \frac{\ell^2}{m^2} a_{12} = 0$$

$$\xi^2 a_{12} - \xi(a_{11} - a_{22}) - a_{12} = 0$$

Siano $a_1$ ed $a_2$ i 2 assi ed indichiamo con $A_\infty$ il punto improprio di $a_1$ e con $A_1$ il polo di $a_1$

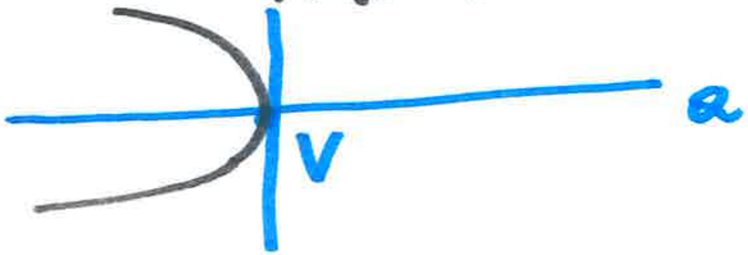



$\Rightarrow A_\infty \perp A_1$. La polare di $A_\infty$ deve passare per il polo di $a_1 = A_1$. La polare di $A_\infty$ é ortogonale al

punto $A_\infty$ ⇒ la polare di $A_\infty$ è un asse.
(e passa per $A_1$).
Visto che di assi ne abbiamo 2 essa deve essere $a_1$ e dunque $a_1 \perp a_2$.

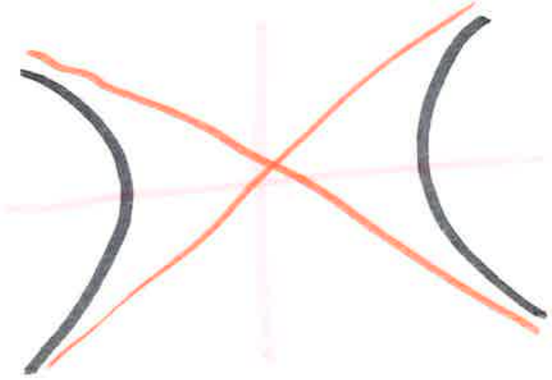
**oss**: Sia $\mathscr{C}$ una conica generale. e $V$ un suo vertice
⇒ la tangente a $\mathscr{C}$ in $V$ è una retta ortogonale il diametro (= asse) per $V$.

i $A = a^{\perp_e}$




$V^{\perp_e}$ = tangente in $V$ a $\mathscr{C}$ deve passare per il polo di $a$, ma il polo di $a$ è ortogonale la direzione di $a$ ⇒ ok.

ellisse



iperbole.

parabola.

Un ente geometrico in $EG(2,\mathbb{R})$ non cambia se si cambia riferimento.

→ vogliamo scegliere un riferimento di $EG(2,\mathbb{R})$ tale che l'equazione di una conica sia la più semplice possibile rispetto ad esso, senza peró perdere in generalità.

$\mathcal{C}$ circonferenza. Fissiamo un riferimento

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

in cui $O$ coincide col centro di $\mathcal{C}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$J_\infty \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + i a_{12} & a_{12} + i a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{11} + i a_{12} + i a_{12} - a_{22} = 0$$

$$a_{12} = 0$$
$$a_{22} = a_{11}$$

$$(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = 0$$

$$(0\,1\,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \cancel{a_{12}}\,0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

voglio che la soluzione sia $(0\,0\,1)$

$$\Rightarrow a_{13} = 0 = a_{23}$$

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}x_3^2 = 0$$

$x^2 + y^2 = \delta$ con $\delta = -\dfrac{a_{33}}{a_{11}}$

$\delta > 0$ circonferenza $\delta = 0 \Rightarrow$ conica rid. 2 rette isotrope.

$\delta < 0 \rightarrow$ circonferenza priva di punti reali (comunque conica irriducibile).

ALTRE CONICHE A CENTRO.

$$\Gamma = (\mathcal{O}, \mathcal{B})$$

con $\mathcal{O}$ = centro della conica

$\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ base formata da 2 versori paralleli agli assi della conica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$(0\,0\,1)$ sia il centro.

$$(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \longrightarrow (a_{11}\; a_{12}\; a_{13})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \rightarrow a_{13}=0$$

$$(0\,1\,0)A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \rightarrow (a_{12}\; a_{22}\; a_{23})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \rightarrow a_{23}=0$$

gli assi hanno direzione $(1\,0\,0)$ e $(0\,1\,0)$.
corrisponde a dire che i punti $[(1\,0\,0)]$ e $[(0\,1\,0)]$
devono essere coniugati:

$$(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \quad (a_{11}\; a_{12}\; a_{13})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \rightarrow a_{12}=0$$

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$$

se la conica é una ellisse $\Rightarrow a_{11} a_{22} > 0$

quindi posso scrivere $a_{11} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$

$a_{22} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -a_{33}.$$

se $a_{33} > 0 \Rightarrow$ NON CI SONO PUNTI REALI

se $a_{33} < 0 \Rightarrow a_{33} = -\gamma^2$ divido per $-\gamma^2$

e pongo $a^2 = \alpha^2\gamma^2$ $b^2 = \beta^2\gamma^2$ ed ottengo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

se la conica è un'iperbole $\Rightarrow a_{11} a_{22} < 0$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \qquad a_{22} = -\left(\frac{1}{\beta}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -a_{33}$$

dividendo per $\gamma = \sqrt{|a_{33}|}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$

eq. dell'iperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

**parabola**: la forma canonica si ottiene prendendo come origine il vertice e come versori della base il versore che corrisponde alla direzione dell'asse e quello che corrisponde alla dir. della tg. nel vertice.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1) $V = [(0\,0\,1)]$

2) asse dir $= [(0\,1\,0)]$
e $(0\,1\,0)$ é anche il punto improprio della parabola.

3) il vertice deve essere coniugato al punto $[(1\,0\,0)]$ = dir. tg. nel vertice

1) $(0\,0\,1)A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a_{33}=0$

$(0\,1\,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a_{22}=0$

$\Delta = a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$

perché parabola

$\Rightarrow a_{12}=0$

$(0\,0\,1)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0 \rightarrow a_{13}=0$

$a_{11}x_1^2+2a_{23}x_2x_3=0 \rightarrow a_{11}x^2+2a_{23}y=0$

$\boxed{y=\alpha x^2}$ $\quad \alpha=-\frac{a_{11}}{2a_{23}}$.

Ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

oppure

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

oppure

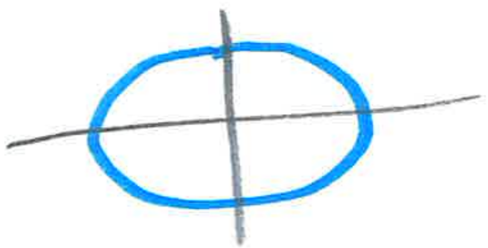
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

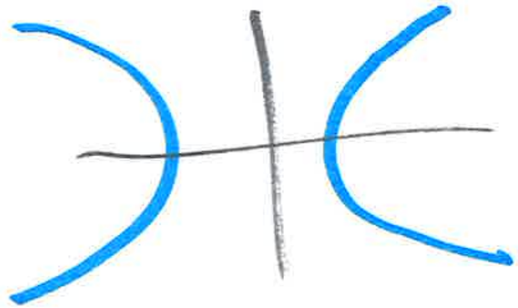
parabola

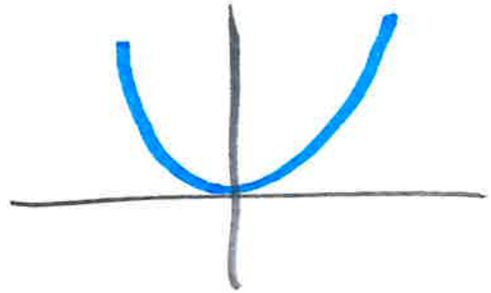
$$y=\alpha x^2$$

oppure

$$x=\alpha y^2$$







ogni asse di una conica è un asse di simmetria.

$(x,y) \to (x,-y)$ $\quad e_x$

$(x,y) \to (-x,y)$ $\quad e_y$.

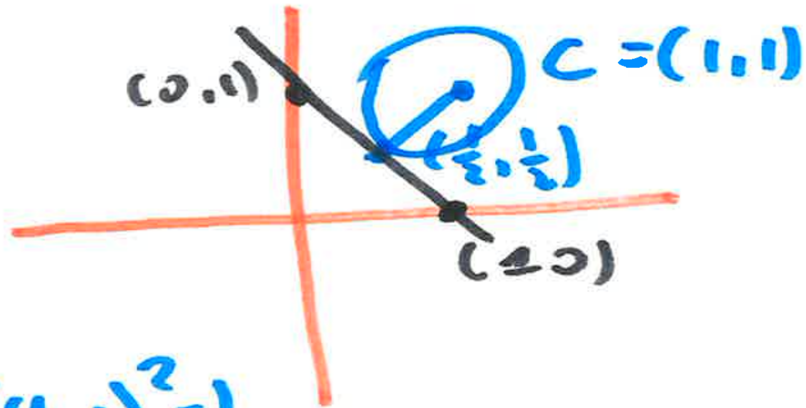
conica tale che $(1\,0)$ e $(0\,1)$ coniugati.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{13} & a_{12}+a_{23} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{12}+a_{23}+a_{13}+a_{33}=0$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$




raggio $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$