ASSE DI UN SEGMENTO IN $EG(2,\mathbb{R})$
PIANO ASSIALE IN $EG(3,\mathbb{R})$

Siano P, Q due punti.

definiamo il punto medio M fra P e Q come il punto tale che $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$

(NON SERVE LA DISTANZA).

1) $M \in$ alla retta per P e Q.

2) $d(P,M)^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 = \|\overrightarrow{MQ}\|^2 = d(M,Q)^2$.

M è equidistante da P e Q.

$n=2$ se $P=(x_P, y_P)$

$Q=(x_Q, y_Q) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ $\quad \overrightarrow{PM} = \left(\frac{x_Q - x_P}{2} \quad \frac{y_Q - y_P}{2}\right)$

$\Rightarrow M = P + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{x_Q + x_P}{2} \quad \frac{y_Q + y_P}{2}\right)$

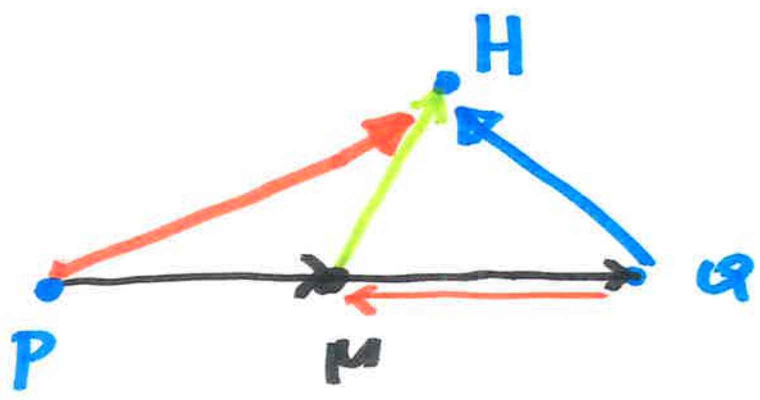
3) le coordinate di M sono la media aritmetica delle corrispondenti coordinate di P e Q.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} \Rightarrow \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}.$

DIM



Sia H appartenente all'asse fra P e Q.

$d(P,H) = d(Q,H) \Rightarrow \|\overrightarrow{PH}\|^2 = \|\overrightarrow{QH}\|^2$

$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}$

$\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MH}$

$$\|\overrightarrow{PH}\|^2 = \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PH} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}) = \|\overrightarrow{PM}\|^2 + 2\,\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MH} + \|\overrightarrow{MH}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{QH}\|^2 = \overrightarrow{QH}\cdot\overrightarrow{QH} = \|\overrightarrow{QM}\|^2 + \overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{MH} + \|\overrightarrow{MH}\|^2$$

quando $\|\overrightarrow{QH}\|^2 = \|\overrightarrow{PH}\|^2 \iff$

$$\cancel{\|\overrightarrow{QM}\|^2} + \overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{MH} + \cancel{\|\overrightarrow{MH}\|^2} = \cancel{\|\overrightarrow{PM}\|^2} + \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MH} + \cancel{\|\overrightarrow{MH}\|^2}$$

$$\iff \overrightarrow{MH}\cdot(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QM}) = 0$$

$$\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$$

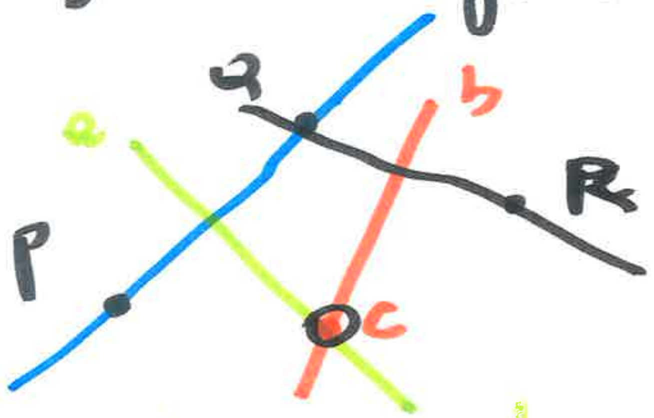
$$\iff \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$$

Tutti e soli i punti sull'asse devono essere traslati di M secondo un vettore $\perp \overrightarrow{PQ}$.

$\Rightarrow$ essi sono sulla retta per M ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$.

Se $n=3$ la dimostrazione è identica, ma la condizione $\vec{MH}\cdot\vec{PQ}=0$ ci dà un piano. $\dim(\vec{PQ})^{\perp}=2 \Rightarrow$ si parla di <u>piano assiale</u>.

<u>OSS</u>: Circonferenza per 3 punti non allineati:



$C = a \cap b$

$d(C,R) = d(C,Q)$

$d(C,P) = d(C,Q)$

2 modi — 1 impostare le equazioni:

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r_c^2$

C = centro della circ. & raggio $= d(P,C)$.

Teorema dell'ordine.

Sia $F(x_1\ x_2\ x_3)$ un polinomio omogeneo di grado n in $x_1\ x_2\ x_3$. e sia

$$\tilde{V}(F) = \{[(x_1, x_2\, x_3)] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid F(x_1\, x_2\, x_3) = 0\}.$$

Allora per ogni retta r di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ o

- $r \subseteq \tilde{V}(F)$
- oppure $|r \cap \tilde{V}(F)| = n$ punti (contati con le debite molteplicità).

CONSEGUENZA: Se $|r \cap \tilde{V}(F)| > n \Rightarrow r \subseteq \tilde{V}(F)$.

Idea della dimostrazione (in $AG(n, \mathbb{C})$).

$f(x,y) = 0 \quad \deg f = n \quad r: y = ax+b$

per trovare $V(f) \cap r$ sostituiamo $y = ax+b$

nell'equazione $f(x,y)=0$ → troviamo

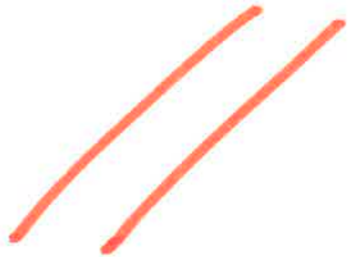
$g(x) := f(x, ax+b)$ polinomio in x

se $\deg g(x) = n \Rightarrow \exists\, n$ soluzioni → fine.

pb: in teoria $\deg g(x)$ può essere $< n$ e non necessariamente $=0$ in questo caso.

$f(x,y) = y - x - 1 = 0$

$r_0 : y - x - 2 = 0$



<u>DIM</u> Teorema dell'ordine.

$F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$

$$r_0 \begin{cases} x_1 = \lambda a + \mu a' \\ x_2 = \lambda b + \mu b' \\ x_3 = \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

$r_0 = \langle (a, b, c), (a'\ b'\ c') \rangle$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$g(\lambda,\mu) := F(\lambda a+\mu a', \lambda b+\mu b', \lambda c+\mu c').$$

2 possibilità:

1) $g(\lambda,\mu) = 0 \quad \forall \lambda,\mu \Rightarrow r \subseteq \tilde{V}(F).$

2) $g(\lambda,\mu)$ NON È IDENTICAMENTE NULLO

$\Rightarrow \deg g(\lambda,\mu) = n = \deg F.$

$$F = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{n-j-i}$$

$$g(\lambda,\mu) = \sum_{i,j} a_{ij} (\lambda a+\mu a')^i (\lambda b+\mu b')^j (\lambda c+\mu c')^{n-i-j}$$

$\deg g(\lambda,\mu) = n$ e g é omogeneo.

$$g(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{n} g_i \lambda^i \mu^{n-i}$$

MOSTRIAMO CHE ci sono n valori di $[(\lambda,\mu)]$ a meno di proporzionalità che danno $g(\lambda,\mu)=0$.

- Se $g_n \neq 0 \Rightarrow g(\lambda,\mu) = g_n \lambda^n + g_{n-1} \lambda^{n-1} \mu + \dots + g_0 \mu^n$

OSSERVIAMO CHE $[(1,0)]$ NON può essere soluzione di $g=0$ infatti $g(1,0) = \underset{\neq 0}{g_n}$

Tutte le soluzioni di $g=0$ hanno $\mu \neq 0$

$\Rightarrow$ dividiamo per μ^n, poniamo $x = \frac{\lambda}{\mu}$

$$h(x) = \frac{g(\lambda,\mu)}{\mu^n} = g_n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + g_{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} + \dots + g_0$$

$$= g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \dots + g_0$$

è un polinomio in una incognita di grado n definito su di un campo algebricamente chiuso $\Rightarrow$ $h(x)=0$ ammette n radici. $\Rightarrow$ ognuna di esse corrisponde ad un punto $[(x_i,1)] = [(\lambda_i,\mu_i)]$

$\Rightarrow$ le intersezioni di $V(F)$ ed r sono n.

• Se $g_n = g_{n-1} = \dots = g_{n-k} = 0 \quad g_{n-k-1} \neq 0$

$$g(\lambda, \mu) = g_{n-k-1} \lambda^{n-k-1} \mu^{k+1} + \dots + g_0 \mu^n =$$

$$= \mu^{k+1} \left(g_{n-k-1} \lambda^{n-k-1} + \dots + g_0 \mu^{n-k-1} \right)$$

OSSERVIAMO CHE $[(1,0)]$ é soluzione con $\mu = 0$ di questa equazione $(k+1)$ volte.

Il polinomio $h(\lambda,\mu) = g_{n-k-1} \lambda^{n-k-1} + \dots + g_0 \mu^{n-k-1}$ é un polinomio omogeneo di grado $n-k-1$ con coeff. del termine λ^{n-k-1} diverso da 0

Applicando il medesimo ragionamento visto prima (i.e. osservando che $[(1,0)]$ non é ma soluzione e che quindi si può dividere per μ^{n-k-1} ed ottenere un polinomio di grado $n-k-1$ in un'unica incognita) si verifica che ci sono $n-k-1$ soluzioni del tipo $[(\lambda,\mu)]$ con $\mu \neq 0$.

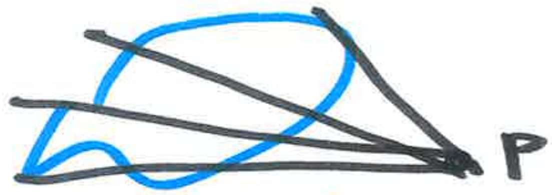
TOTALE SOLUZIONI $(n-k-1)+(k+1)=n$. $\square$

CONSEGUENZA: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Allora $|\tilde{V}(F)| = \infty$.

<u>DIM</u>: Sia $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ la nostra curva.

Se $\mathcal{C}$ è una retta $\Rightarrow |\mathcal{C}| = \infty$ fine.

Altrimenti: sia P un punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ che non appartiene a $\mathcal{C}$ e consideriamo il fascio di rette per P.



ogni retta del Fascio interseca $\mathcal{C}$ in punti differenti rispetto le altre (ed in particolare in almeno 1 punto).

Visto che le rette di un fascio sono tante quante i punti di una retta (e questi sono ∞) abbiamo che $\mathcal{C}$ deve contenere almeno tanti punti quanti una retta $\Rightarrow \infty$ punti

$\square$

Def: Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'eq. di una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Si dice che una retta $r_0 : a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$ interseca la curva $\tilde{V}(F)$ in un punto P con molteplicità $t \geq 1$ se

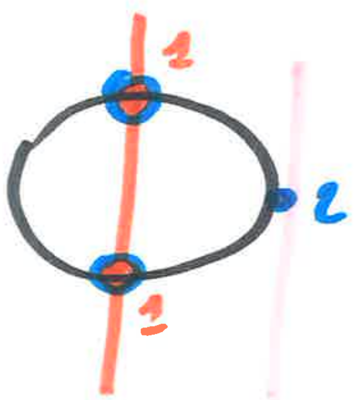
1) $P \in r_0 \cap \tilde{V}(F)$
2) Sostituendo l'eq. parametrica della retta in $F(x_1, x_2, x_3)$ si ottiene che i valori che corrispondono al punto P sono con molteplicità di radice t.

CASO AFFINE

$f(x,y) = 0 \qquad y = ax + b$

$f(x, ax+b) = g(x)$

P deve avere coordinata x_P tale che $g(x_P)=0$ affinché sia sulla intersezione. La molteplicità di intersezione di $V(f)$ con r in P è data dalla molteplicità di x_P come radice di $g(x)=0$.



Es. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=1 \end{cases}$

$\cancel{y^2=1}$

$1+y^2=1$

$y^2=0$

molteplicità $=2$

d

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases}$$

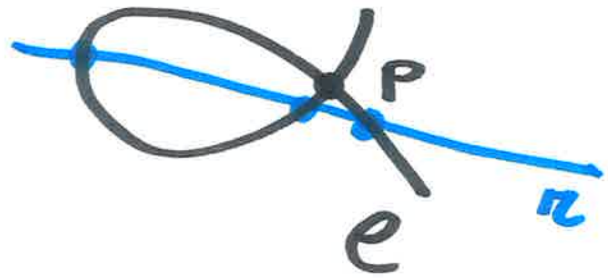
$$y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=10 \end{cases}$$

$$100+y^2=1$$
$$y^2=-99$$
$$y=\pm i\sqrt{99}$$

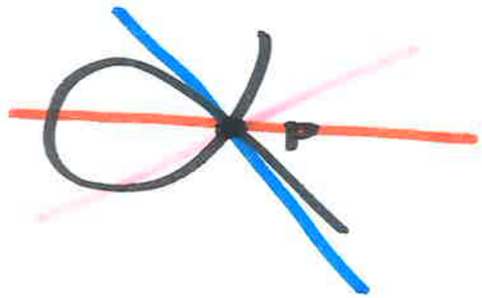
Def: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica e $P \in \tilde{V}(F)$ un suo punto. P è detto punto t-uplo $(t \geq 2)$ per $\tilde{V}(F)$ se ogni retta per P

interseca $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ in P ~~sta tavol~~ almeno t volte ed esistono t rette che intersecano $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ in P $t+1$ volte.

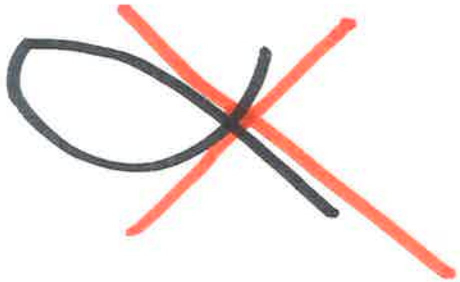


$|r \cap e| \geq 3$

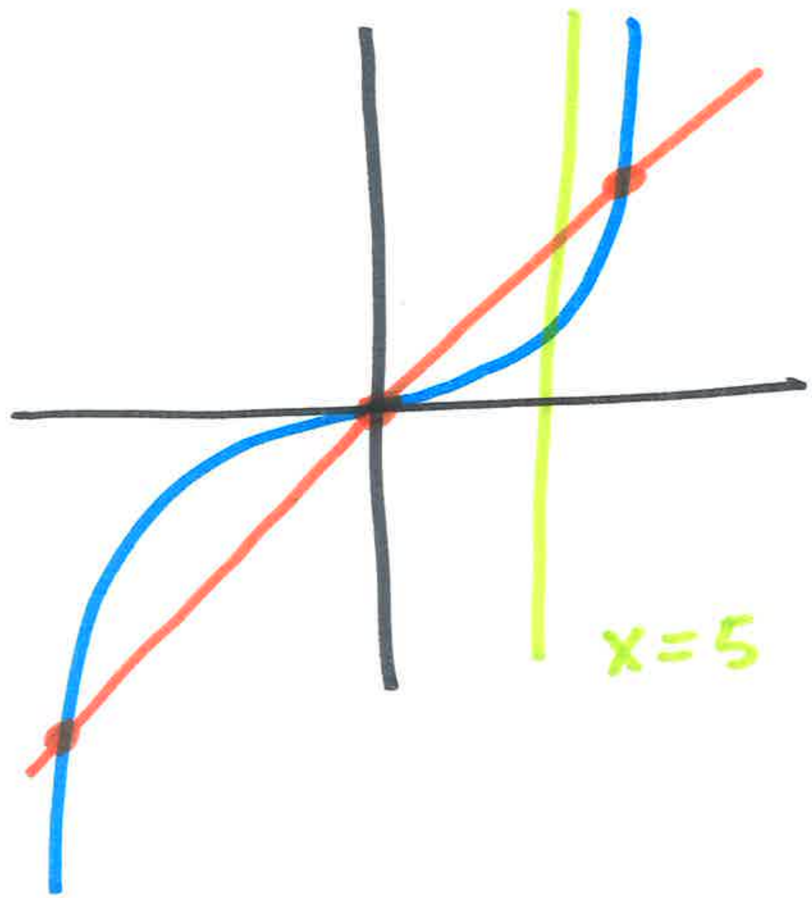
$\Rightarrow$ e è almeno una cubica.



P è punto doppio



$y = x^3$



$x_3 = 0$

$x_3 x_1^3 = 0$

$x_1 = 0$

$[(0\ 1\ 0)]$

soluzioni improprie.

$$\begin{cases} x_2 x_3^2 = x_1^3 \\ x_1 = \alpha x_3 \end{cases} \longrightarrow \text{soluzioni } x_3 \neq 0 \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha x_3 \\ x_2 &= \alpha^3 x_3^3 / x_3^2 = \\ &= \alpha^3 x_3 \end{aligned}$$

sol. proprie $\rightarrow [(\alpha, \alpha^3, 1)]$

SOSTITUENDO NELLA I eq.

$$x_2 x_3^2 = x_1^3 = (\alpha x_3)^3$$

$$x_2 x_3^2 = \alpha^3 x_3^3 \Rightarrow x_3^2(x_2 - \alpha^3 x_3) = 0$$

quindi $x_3 = 0$ é soluzione doppia

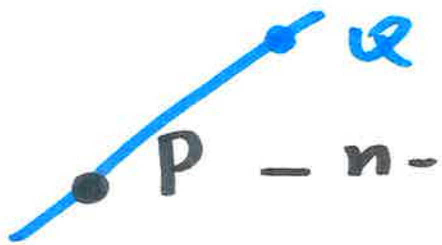
$\Rightarrow$ $[(0\ 1\ 0)]$ è punto doppio per $\mathcal{C}$.

<u>OSS</u>: Sia $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ una curva algebrica di ordine n (= tale che $\deg F = n$).
Allora $\tilde{V}(F)$ non contiene punti $(n+1)$-upli.
Inoltre se $\tilde{V}(F)$ ha un punto n-uplo $\Rightarrow$ $\tilde{V}(F)$ é unione di n rette.

1) Se ci fosse un punto p $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ ogni retta per P intersecherebbe $\mathcal{C}$ almeno $n+1$ volte (in P) $\Rightarrow$ sarebbe contenuta $\Rightarrow$ $\forall$ perché $\mathcal{C} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. $\forall$.

ASSURDO.

2)



P – n-uplo.

esiste $Q \in \mathcal{C}$ con $Q \neq P$

prendiamo la retta r per P e Q $\Rightarrow$ essa interseca in P n-volte ed in Q almeno 1 volta $\Rightarrow$ $r \subseteq \mathcal{C}$ per il teorema di ordine.

Se $\mathcal{C} = r \Rightarrow$ FINE.

Se $\mathcal{C} \neq r \Rightarrow \exists R \in \mathcal{C} \setminus r$.

per il medesimo ragionamento la retta s per P ed R deve essere contenuta in $\mathcal{C} \Rightarrow r \cup s \subseteq \mathcal{C}$.

Iteriamo fino a che non abbiamo ottenuto tutti i punti di $\mathcal{C}$.

3 rette per un punto P

$\Rightarrow$ curva di ordine $= 3$ che si spezza in esse e P è triplo.

Teorema: Sia $F(x_1\ x_2\ x_3)$ un polinomio omogeneo.
$P \in \tilde{V}(F)$ é un punto multiplo per $\tilde{V}(F)$ se e solamente se.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P = 0$$

$$\nabla(F)_P := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_P \equiv 0$$

ove se $F = \sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j}$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum_{i,j} i\, a_{ij} x_1^{i-1} x_2^j x_3^{n-i-j}$$ con

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \sum_{i,j} j\, a_{ij}\, x_1^{i} x_2^{j-1} x_3^{n-i-j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = \sum_{i,j} (n-i-j)\, x_1^{i} x_2^{j} x_3^{n-i-j-1}$$

$$y = x^3 \longrightarrow x_2 x_3^2 - x_1^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_3^2 = 0 \qquad \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_2 x_3 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

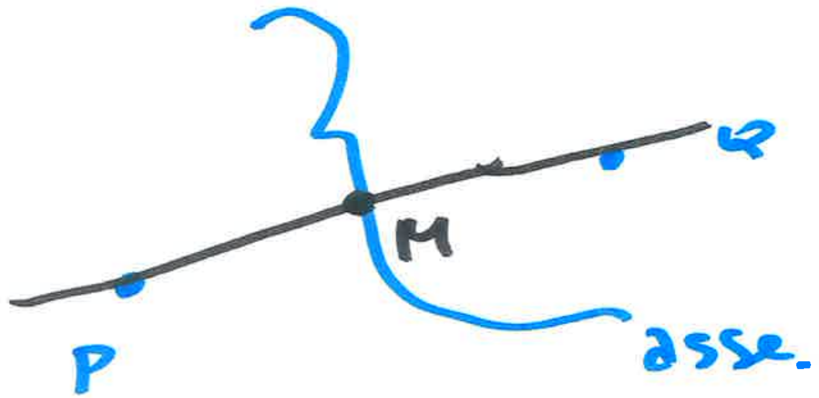
$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \rightarrow [(0\,1\,0)]$$

<u>p.to doppio</u>

- STUDIO CONICHE.

$n=2$ ASSE FRA P e Q:

luogo dei punti $R \in EG(2,\mathbb{R})$ tali che $d(P,R)=d(Q,R)$.



$M \in ASSE(P,Q)$.

$d(P,M)=d(Q,M)$.

Teorema: l'asse fra P e Q è una retta passante per M. in particolare è la retta per M ortogonale al vettore $\overrightarrow{PQ}$.