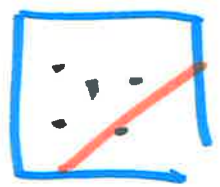
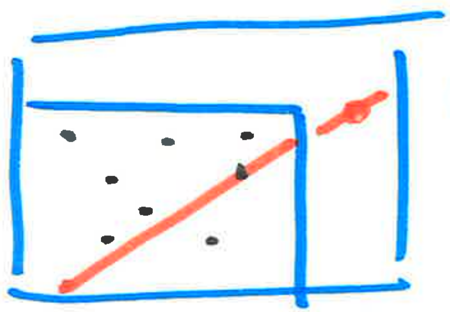
COMPLESSIFICAZIONE



$AG(n, \mathbb{K})$ $\hookrightarrow$ $PG(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$



punti propri	punti impropri
$[(x_1 \dots x_n\ 1)]$	$[(y_1 \dots y_n\ 0)]$
$\downarrow$	$\downarrow$
punti dello spazio affine	direzioni delle rette.

$$f(x,y) = 0 \longmapsto F(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

2 rette in $AG(2,\mathbb{K})$ $\longrightarrow$ 2 sottospazi vettoriali 2 dimensionali di $\mathbb{K}^3$

$\downarrow$

si intersecano sempre in un punto
- proprio se le rette sono incidenti
- improprio se le rette sono parallele.

Un fascio in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ é proprio se consiste di tutte le rette per un punto proprio.
improprio se consiste di tutte le rette per un punto improprio (= con la stessa direzione).

$AG(n, \mathbb{R}) = EG(n, \mathbb{R})$

$\mathbb{P}^n \mathbb{R}$

invece che lavorare su $\mathbb{R}$ lavoriamo su $\mathbb{C}$

In $EG(n, \mathbb{R})$ consideriamo il luogo geometrico dei punti a distanza $d>0$ da un punto dato $C = (x_0, y_0)$.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = d^2$$

CIRCONFERENZA DI RAGGIO $d>0$

→ CURVA ALGEBRICA PIANA DI II ORDINE.

Def: Sia $f(x,y)$ un polinomio in x ed y non identicamente nullo e di grado $n \geq 1$.
Si dice curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$ l'insieme

$$\mathcal{V}(f) := \{(x,y) \in AG(2,\mathbb{K}) \mid f(x,y)=0\}.$$

$\mathcal{V}(x^2+y^2-1) \rightarrow$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1.

DOMANDA: quando $\mathcal{V}(f) \neq \emptyset$?

Es. $\mathcal{V}(x^2+y^2+1) = \emptyset$ su $\mathbb{R}$.

$\mathcal{V}(x^2+y^2) = \{(0,0)\}$ su $\mathbb{R}$

Se lavoriamo su $\mathbb{R}$ cioè in $AG(2,\mathbb{R})$ è possibile che una curva algebrica non abbia punti o ne abbia solo uno.

Se lavoriamo su campi algebricamente chiusi (es. $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{C}$) le cose vanno meglio.

$$f(x,y) = \sum_{\substack{0\le i,j \\ i+j\le n}} a_{ij}\, x^i y^j$$

se $\deg f(x,y)=n$ esistono in $f(x,y)$ almeno un monomio $x^i y^j$ con $i+j=n$

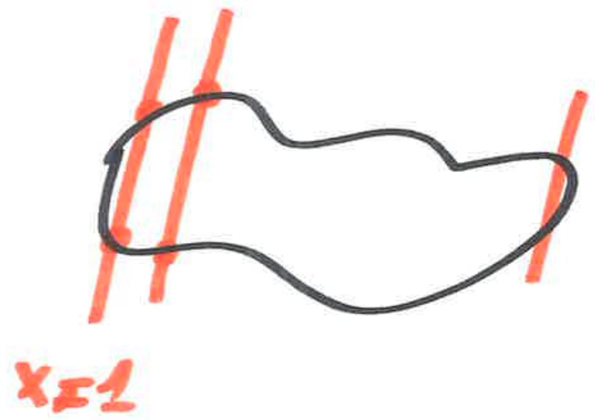
In particolare se $i=n,\ j=0 \Rightarrow f(x,1)=0$ è una eq. di grado n in x → AMMETTE in $\overline{\mathbb{K}}$ algebricamente chiuso almeno una soluzione.

se $i=0, j=n \Rightarrow f(1,y)$ ammette almeno una soluzione perché ha grado n. ~~(o è identic. nullo)~~.

se $i \neq 0 \neq j \Rightarrow f(1,y)$ è un polinomio di grado j o è identicamente nullo $\Rightarrow$ in ogni caso c'è almeno una soluzione.

$V(f)$ se lavoriamo su $\mathbb{R}$ può essere vuoto

se lavoriamo su $\mathbb{C}$ non è mai vuoto $\Rightarrow$ si può far vederce che contiene ∞ punti.



CIRCONFERENZA DI RAGGIO $=0$ in $EG(2,\mathbb{R})$.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$$

in $\mathbb{R}$ l'unica soluzione è $C=(x_0,y_0)$

in $\mathbb{C}$

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]=(x-x_0+i(y-y_0))\cdot(x-x_0-i(y-y_0))$$

Def: Sia $V(f)$ una curva algebrica. Si dice che

$V(f)$ é riducibile se $\exists\, g, h$ polinomi di grado ≥ 1 tali che

$$V(f) = V(g) \cup V(h)$$

cioé la curva si rappresenta come l'unione di 2 curve algebriche.

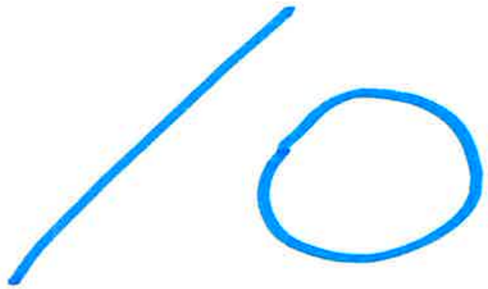
<u>OSS</u>: Se $f(x,y) = g(x,y) \cdot h(x,y) \Rightarrow$

$$f(x,y) = 0 \iff g(x,y) = 0 \text{ oppure } h(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow V(f) = V(g) \cup V(h).$$

Se $f(x,y)$ si fattorizza nel prodotto di 2 polinomi $\Rightarrow$ la curva $V(f)$ é riducibile.

Vale anche il viceversa?
cioè è vero che se $V(f) = V(g) \cup V(h)$
allora $f = gh$??



$$(x-y)\left[(x-5)^2+(y-4)^2-3\right]=0$$

Vale il fatto che se $V(f) = V(g) \cup V(h)$
allora esistono polinomi
f_0, g_0, h_0 ed interi i, j, k
tali che 1) $f_0 = g_0 h_0$

$i, j, k > 0$ 2) $f = f_0^i$, $g = g_0^j$ $h = h_0^k$

$$f(x,y) = (x-y)^2 (x^3 - 3x + y)^4$$

$$V(f) = V((x-y)^2) \cup V((x^3-3x+y)^4)$$
$$= V((x-y)) \cup V(x^3-3x+y)$$

→ Questo teorema funziona bene se il campo su cui si lavora è algebricamente chiuso.

→ Se un campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso ed abbiamo un insieme di punti W che sappiamo essere descritto da una eq. algebrica.

⇒ è possibile trovare una unica (a meno di proporzionalità) eq. algebrica di grado minimo che descrive W.

EQUAZIONI "CHE NON SONO POTENZE DI GRADO >2 DI POLINOMI" $\longleftrightarrow$ CURVE ALGEBRICHE.

$$f(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5 = 0 \rightarrow \emptyset$$

$$y^8 + x^4 + 3x^2y^2 + 7y^2 + 52 = 0 \longrightarrow \emptyset$$

COMPLESSIFICAZIONE

$$AG(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow AG(2,\mathbb{C}).$$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2\subseteq\mathbb{C}^2$$

AFFINE.

IN AMBITO PROIETTIVO:

$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$[(x_1,x_2,x_3)]_{\mathbb{R}} =$

$= \{\alpha(x_1\ x_2\ x_3) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

$[(x_1\ x_2\ x_3)]_{\mathbb{C}} =$

$= \{\alpha(x_1 x_2\ x_3) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}.$

sono insiemi differenti!

Def: Un punto in $AG(2,\mathbb{C})$ o in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si dice <u>reale</u> se esso ammette una rappresentazione in coordinate con tutte le componenti $\in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc}
[(x,y,1)] \in \mathbb{P}^2\mathbb{R} & \longrightarrow & [(x,y,1)] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \\
\uparrow & & \downarrow \\
(x,y) \in AG(2,\mathbb{R}) & & (x,y) \in AG(2,\mathbb{C}).
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(1,0) \in AG(2,\mathbb{R}) & & \\
\downarrow & & \\
[(1,0,1)]_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & [(1\,0\,1)]_{\mathbb{C}} = [(i,0,i)]_{\mathbb{C}}
\end{array}$$

__OSS:__ Un punto P di $AG(2,\mathbb{C})$ ovvero di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è reale $\iff P = \overline{P}$

In $AG(2,\mathbb{C})$ è immediato, infatti

$$P = (x,y) \Rightarrow \overline{P} = (\overline{x},\overline{y})$$

e dunque $P = \overline{P} \iff \begin{matrix} x = \overline{x} \\ y = \overline{y} \end{matrix} \iff x, y \in \mathbb{R}$.

In ~~AG(2~~ $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è più delicato.

$$P = \overline{P} \iff [(x_1\ x_2\ x_3)] = \overline{[(x_1\ x_2\ x_3)]}$$
$$= [(\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3)]$$

$$\iff \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \end{pmatrix} = 1$$

supponiamo $rk\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow$ 1) $(x_1\ x_2\ x_3) = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3) \Rightarrow$ P ha coordinate in $\mathbb{R} \Rightarrow$ FINE.

2) $(x_1\ x_2\ x_3) = -(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{i(x_1\ x_2\ x_3)} = \bar{i}\,(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3) =$

$= -\bar{i}\,(x_1\ x_2\ x_3) =$

$= i\,(x_1\ x_2\ x_3).$

In particolare $(ix_1\ ix_2\ ix_3)$ sono coordinate reali per P.

3) $(x_1\ x_2\ x_3) \neq -(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3) \Rightarrow$

$(x_1+\bar{x}_1 \;\; x_2+\bar{x}_2 \;\; x_3+\bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$.

e rappresenta il punto P.

→ **Def:** Diciamo che una curva algebrica $V(f)$ in $AG(2,\mathbb{C})$ è reale se $V(f) = \overline{V(f)}$.

Similmente, posto $F(x_1\, x_2\, x_3) := x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}\, \frac{x_2}{x_3}\right)$

e $\tilde{V}(F) = \{[(x_1\, x_2\, x_3)] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \mid F(x_1 x_2 x_3) = 0\}$.

diciamo che $\tilde{V}(F)$ è reale se $\overline{\tilde{V}(F)} = \tilde{V}(F)$

Teorema: Una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ (o $AG(2,\mathbb{C})$) é reale $\Leftrightarrow$ essa ammette una equazione $f(x_1 x_2 x_3)=0$ (oppure $f(x,y)=0$) a coeff. tutti reali.

<u>oss</u>: Se $f(x,y)=0$ é una equazione a coeff. tutti reali $\Rightarrow$

$$f(x,y)=0 \Leftrightarrow \overline{f(x,y)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y})=0 \Leftrightarrow f(\bar{x},\bar{y})=0$$

quindi $V(f)=\overline{V(f)}$.

Il viceversa è più complicato.

PARTENZA: Insieme $\mathcal{V}(f) = \overline{\mathcal{V}(f)}$

$\Vert$ EQUAZIONE $g=0$ per $\mathcal{V}(f)$ deg g min

$\Vert$ EQUAZIONE $\bar{g}=0$ per $\overline{\mathcal{V}(f)}$ deg $\bar{g}$ min.

si osserva che se $g+\bar{g} \not\equiv 0$ allora abbiamo una equazione per

$$\mathcal{V}(f) = \overline{\mathcal{V}(f)}$$

~~a patto che~~

se $g+\bar{g} \equiv 0 \Rightarrow \bar{g} = ig \Rightarrow$

$ig = 0$ eq. reale per $\mathcal{V}(f)$.

In particolare le curve algebriche reali si possono definire in $AG(2,\mathbb{R})$.

rette: Una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ é reale se e solo se coincide con la sua coniugata e questo é equivalente a dire che essa ammette una eq. del tipo

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \ (a, b, c) \neq \underline{0}$$

Sia r una retta in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

$$a X_1 + b X_2 + c X_3 = 0$$

e supponiamo r sia coincidente con $\bar{r}$

$\Rightarrow \exists$ un punto $P = [(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)] \in r$ tale che $P \neq \bar{P}$ e $[(\bar{\alpha}_1 \ \bar{\alpha}_2 \ \bar{\alpha}_3)] \in r$

osserviamo che $r_0 = \bar{r}$ dunque r_0 è la retta per P e $\bar{P}$ visto che per 2 punti distinti vi è un'unica retta.

equazione
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \end{vmatrix} = 0$$

(*) $$x_1 (\underbrace{a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3}) - x_2 (\underbrace{a_1\bar{a}_3 - a_3\bar{a}_1}) + x_3 (\underbrace{a_1\bar{a}_2 - a_2\bar{a}_1}) = 0$$

sono tutti numeri immaginari puri!

$$z = a + ib.$$

$$z - \bar{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib$$

quindi se dividiamo l'equazione (*) per i otteniamo una eq. a coeff. reali per la retta.

N.B: Se una retta contiene un punto immaginario e anche il suo coniugato $\Rightarrow$ è reale.

OSS: Sia r una retta reale $\Rightarrow$ essa contiene ∞ punti reali.

$r \cap \mathbb{A}^2\mathbb{C}$ $\quad r \cap \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

prendere le soluzioni dell'eq. in $\mathbb{R}$ invece che

n. 6.

più in generale, una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ha sempre almeno un punto reale; se ne ha 2 $\Rightarrow$ è reale.

r_0 retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

se r_0 reale $\Rightarrow$ $r_0 = \bar{r}$ ed r ha ∞ punti reali.

se r_0 non è reale $\Rightarrow$ $r_0 \cap \bar{r} = P = \bar{r} \cap r = \bar{P}$

$\Rightarrow$ r ha esattamente un punto reale.

N. Brison

N.B. La geometria che abbiamo introdotto su $\mathbb{C}$ non è una geometria euclidea nel senso che il prodotto scalare di $EG(2,\mathbb{R})$ su $\mathbb{C}$ si comporta in modo differente.

$EG(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow AG(2,\mathbb{C})$

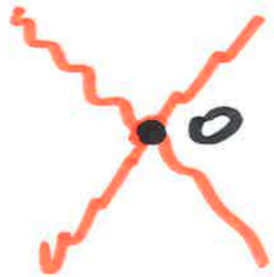
$x^2+y^2=0$

$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$

$V(x^2+y^2)=\{O\}$.

$V(x^2+y^2)=V(x+iy)\cup V(x-iy)$

$\cdot\, O$



Def: In $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si dicono punti ~~isotropi~~ ciclici i punti $[(1,i,0)]$ e $[(1,-i,0)]$.

Teorema: ogni circonferenza passa per i punti ~~isotropi~~ ciclici.

DIM: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=d^2$ in $AG(2,\mathbb{R})$

$(x_1-x_cx_3)^2+(x_2-y_cx_3)^2=d^2x_3^2$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

passiamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ed intersechiamo con

$x_3=0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=0 \rightarrow (x_1,x_2)=$
$=\alpha(1,\pm i)$. $\alpha\neq 0$.

__Def__: Si dicono rette isotrope di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ tutte le rette proprie ($\neq x_3=0$) che passano per i punti ciclici.

Teorema: Due punti $P, Q \in$ ~~$\mathbb{P}^2\mathbb{C}$~~ $AG(2,\mathbb{C})$ hanno distanza euclidea $=0$ se e solamente se appartengono alla medesima retta isotropa.

__DIM__: Supponiamo $P=(x_P,y_P)$ $Q=(x_Q,y_Q)$.

$$d(P,Q)^2=(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2=0$$

$$\Rightarrow (y_P-y_Q)=\pm i\,(x_P-x_Q) \quad \text{in particolare}$$

Q appartiene ad una retta isotropa per P.

Viceversa: sia $P=(x_P, y_P)$ r_0 una retta isotropa per $P \Rightarrow r_0 :$ ~~y~~ $(y-y_P) = \pm i(x-x_P)$.

In particolare se $Q \in r \Rightarrow$

$$(y_Q - y_P) = \pm i\,(x_Q - x_P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2 =$$

$$= -(x_Q - x_P)^2 + (x_Q - x_P)^2 = 0 \qquad \square$$