Geometria Euclidea

Geometria Affine + nozione di prodotto scalare

→ distanza

→ ortogonalità / angoli:

Dato uno spazio affine $AG(n, \mathbb{K})$ definiamo come distanza fra 2 punti

$$d : A \times A \to \mathbb{R}^+$$

tale che

1) $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
2) $d(P, Q) = d(Q, P)$
3) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Esempio:

$$P = (p_1 \dots p_n)$$
$$Q = (q_1 \dots q_n)$$
$$d_H(P,Q) = |\{i \mid p_i \neq q_i\}|$$

Spazi di Hilbert $\subseteq$ Spazi di Banach $\subseteq$ Spazi metrici

Spazi di Hilbert $\downarrow$ prod. scalare def. positivo

$\bullet : V \times V \to \mathbb{R}^+$

Spazi di Banach $\downarrow$ dotati di norma

$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$

Spazi metrici

$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

DISTANZA EUCLIDEA.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spazi affini sul campo Reale.

$EG(n, \mathbb{R})$ Euclidean Geometry.

uno spazio affine in cui il sottospazio vettoriale associato è euclideo

$\downarrow$

DOTATO DI UN PROD. SCALARE DEFINITO POSITIVO.

In $EG(n, \mathbb{R})$ definiamo come distanza euclidea fra due punti P, Q la funzione $d(P,Q) := \|\vec{PQ}\|$.

Diciamo inoltre che 2 sottospazi lineari $\Sigma = [P; W]$ e $\Theta = [Q; U]$ sono ortogonali fra loro $\Leftrightarrow$ $W \subseteq U^\perp$ oppure $W^\perp \subseteq U$

N.B.: $W \subseteq U^\perp \Leftrightarrow U \subseteq W^\perp$ $\quad W^\perp \subseteq U \Leftrightarrow U^\perp \subseteq W$

In uno spazio euclideo, rispetto un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ il prod. scalare è rappresentato da una matrice B reale, simmetrica e con tutti gli autovalori > 0.

<u>Def</u>: Si dice <u>riferimento euclideo</u> di $EG(n, \mathbb{K})$ un riferimento affine ~~rispetto~~ nel quale la base $\mathcal{B}$ è ortonormale rispetto il prod. scalare.

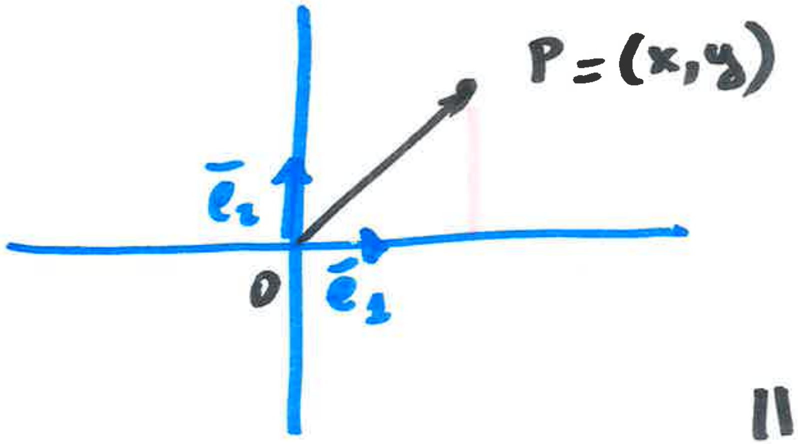
→ in coordinate rispetto un riferimento euclideo

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

OSS: Siano $P=(x_1 \dots x_n)$ rispetto rif. euclideo.

$Q=(y_1 \dots y_n)$

$\Rightarrow \quad d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$



$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$

$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 1$

$\overrightarrow{OP} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Def: Siano $P,Q \in AG(n,\mathbb{K})$. Si dice punto medio fra P e Q il punto M tale che $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$.

OSS: In $EG(n,\mathbb{K})$ siano P,Q due punti ed M il loro punto medio $\Rightarrow$ $d(P,M) = d(M,Q)$ e M appartiene alla retta PQ.

OSS: Siano $P = (x_1 \dots x_n)$ $M = (m_1 \dots m_n)$.
$Q = (y_1 \dots y_n)$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PM} = (m_1 - x_1 \dots m_n - x_n)$$
$$\overrightarrow{MQ} = (y_1 - m_1 \dots y_n - m_n).$$

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ segue

$$(m_1 - x_1 \dots m_n - x_n) = (y_1 - m_1 \dots y_n - m_n)$$

$$2(m_1 \dots m_n) = (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n)$$

DA cui

$$(m_1 \dots m_n) = \frac{1}{2}(x_1 + y_1 \dots x_n + y_n)$$

che $M \in \overline{PQ}$ segue da $P + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} =$

$= Q$ ma

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = 2\,\overrightarrow{PM}$

$\Rightarrow Q \in \overline{PM}.$

$$d(M,P)^2 = \left\|\left[\tfrac{1}{2}(x_1+y_1 \dots x_n+y_n) - (x_1 \dots x_n)\right]\right\|^2 =$$

$$= \left\|\left(\frac{y_1-x_1}{2} \dots \frac{y_n-x_n}{2}\right)\right\|^2 = *$$

$$d(M,Q) = \left\|\left[\tfrac{1}{2}(x_1+y_1 \dots x_n+y_n) - (y_1 \dots y_n)\right]\right\|^2 =$$

$$= \left\|\left(\frac{x_1-y_1}{2} \dots \frac{x_n-y_n}{2}\right)\right\|^2 = *$$

Def: Siano $P, Q \in EG(2, \mathbb{R})$ $P \neq Q$.

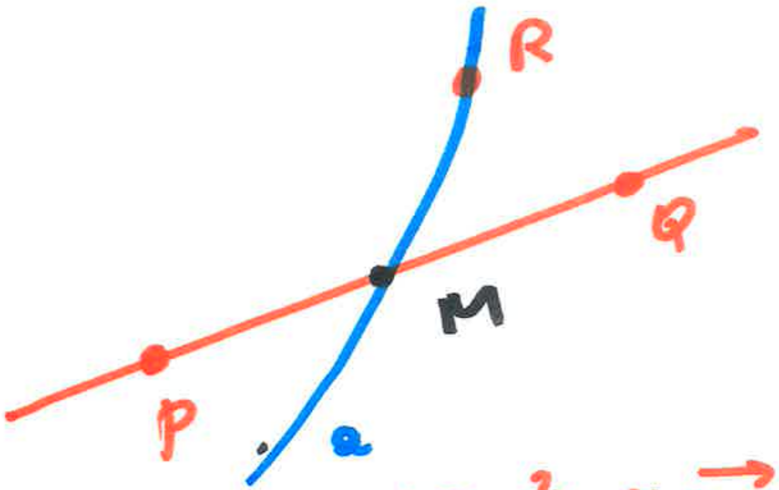
Si dice asse (del segmento) di (estremi) P e Q.
il luogo dei punti equidistanti da P e da Q.

$$\{ X : \|\vec{PX}\| = \|\vec{QX}\| \}.$$

Teorema: l'asse fra P e Q in $EG(2, \mathbb{R})$ è la retta passante per M, punto medio fra P e Q ed ortogonale alla retta PQ.

DIM: 1) osserviamo che se M punto medio fra P e Q $\Rightarrow$
$\vec{PM} = \vec{MQ} \Rightarrow d(P, M) = d(M, Q) \Rightarrow M$ appartiene all'asse.

2) chiamiamo a l'asse fra P e Q.



$$\vec{QM} + \vec{MR} = \vec{QR}$$

Sid $R \in a \Leftrightarrow \quad \|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{RQ}\|^2$

$$\|\vec{PM} + \vec{MR}\|^2 = \|\vec{QM} + \vec{MR}\|^2$$

$$\cancel{\|\vec{PM}\|^2} + \cancel{\|\vec{MR}\|^2} + 2\,\vec{PM}\cdot\vec{MR} = \cancel{\|\vec{QM}\|^2} + \cancel{\|\vec{MR}\|^2} + 2\,\vec{QM}\cdot\vec{MR}$$

$$\|\vec{PM}\|^2 = \|\vec{QM}\|^2 \qquad \|\vec{MR}\|^2 = \|\vec{MR}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\,\vec{PM}\cdot\vec{MR} = 2\,\vec{QM}\cdot\vec{MR}$$

$$2\,\vec{PM}\cdot\vec{MR} = -2\,\vec{PM}\cdot\vec{MR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{PM}\cdot\vec{MR} = 0$$

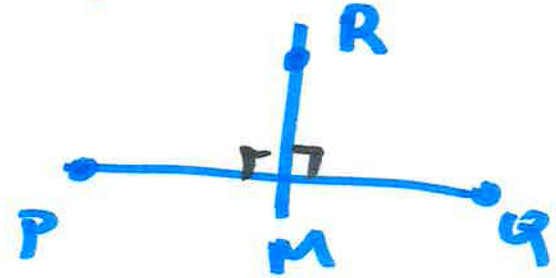
$\Rightarrow$ in particolare $R \in [M; \overset{r}{\mathcal{L}}(\bar{w})]$ con

$$\bar{w} \perp \overrightarrow{PM}.$$

<u>N.B.</u> Nel piano $\dim \overrightarrow{PM}^{\perp} = 1$ e quindi la retta r è univocamente determinata.

Viceversa: sia $r = [M; \mathcal{L}(\overrightarrow{PM})^{\perp}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall R \in r$



$$d(P,R)^2 = \|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MR}\|^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2$$

$$d(Q,R)^2 = \|\overrightarrow{QR}\|^2 = \|\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR}\|^2 = \|\overrightarrow{QM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2 =$$

$$= \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2$$

$\square$

$\boxed{n=2}$ $EG(2, \mathbb{R})$ sia $r : ax + by + c = 0$

che equazioni avranno le rette del fascio ortogonale ad r.

DIREZIONE DI r: SOLUZIONI DI

$$ax + by = 0$$

$$r_\infty = \mathcal{L}((-b, a)).$$

COMPLEMENTO ORTOGONALE

$$r_\infty^\perp = \{(\alpha, \beta) : (-b \cdot \alpha + a\beta) = 0\} =$$

$$= \mathcal{L}((a, b))$$

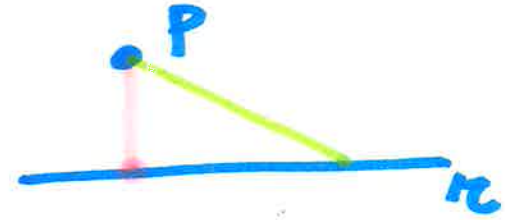
La direzione ortogonale ad r è data dal sottospazio generato dal vettore (a,b).

$r_\infty = \mathcal{L}((-b,a))$

$r: ax+by+c=0$

OSS: Sia P un punto di $\mathcal{E}G(2,\mathbb{R})$ ed r una retta.

Cosa si intende per $d(P,r)$?



Def: Siano $P \in \mathcal{E}G(n,\mathbb{R})$ e $\Sigma = [Q; W]$ un sottospazio.

Si dice distanza fra P e Σ il numero

$$d(P;\Sigma) := \min\{d(P,X) : X \in \Sigma\}.$$

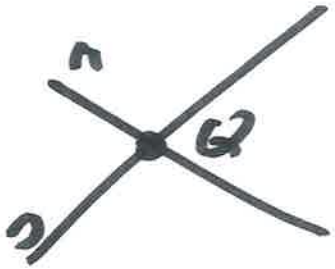
due sottospazi Θ, Σ vorrei che

x $$d(\Theta,\Sigma) = \min\{d(x,y) \mid x\in\Theta, y\in\Sigma\}.$$

Va bene se $\Theta\cap\Sigma = \emptyset$.

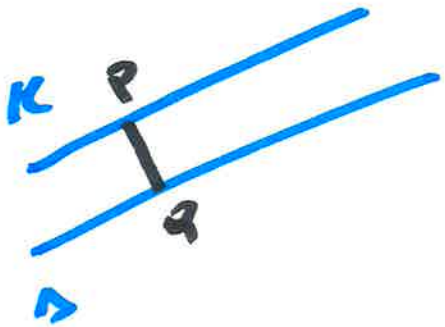
$d(P,r) = 0 \iff P\in r$

$d(r,s) = 0$ ma $r\neq s$



$Q\in r\cap s$.

NON VA BENE.



$d(r,s) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

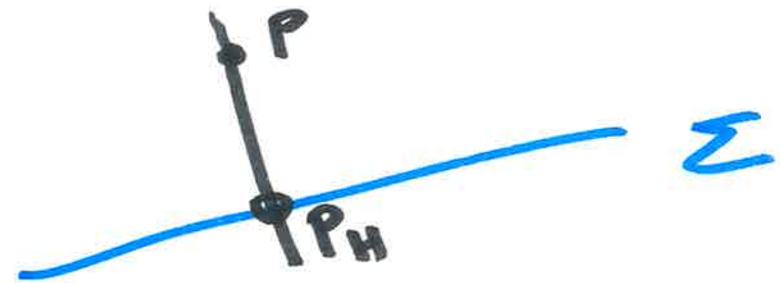
Formula della distanza punto/retta nel piano.

<u>OSS</u>: Sia $P \in EG(n, \mathbb{R})$; Σ un sottospazio

$$\Sigma = [Q; W]$$

Allora il punto di Σ più vicino a P si ottiene come $\Sigma \cap [P; W^{\perp}] = P_H$.

Tale punto $P_H = \Sigma \cap [P; W^{\perp}]$ è detto proiezione ortogonale di P su Σ.



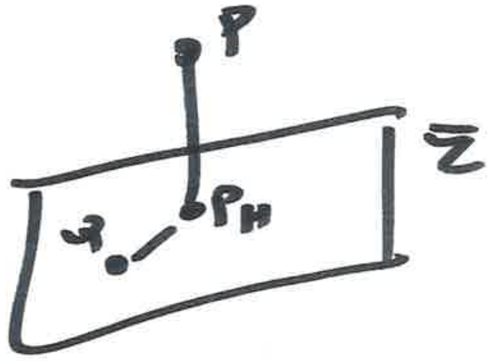
1) $\Sigma \cap [P; W^\perp]$ é un sottospazio affine di dim $= 0$
cioé é solo un punto.

OSSERVIAMO CHE $n=2$ $[P; W^\perp]$ é una retta NON PARALLELA A $\Sigma = [Q; W]$ $\Rightarrow$ si INCONTRANO IN UN PUNTO.

$n=3$ $[P; W^\perp]$ é

- Se $\Sigma = [Q; W]$ é un piano, $[P; W^\perp]$ é una retta non parallela $\Rightarrow \exists!$ punto di intersezione
- Se $\Sigma = [Q; W]$ é una retta $\Rightarrow [P; W^\perp]$ é un piano non parallelo $\Rightarrow \exists!$ punto di intersezione.

2)



calcoliamo

$d(P,Q)^2$ con $Q \in \Sigma$

$$\| \vec{PQ} \|^2 = \| \vec{PP_H} + \vec{P_HQ} \|^2 =$$

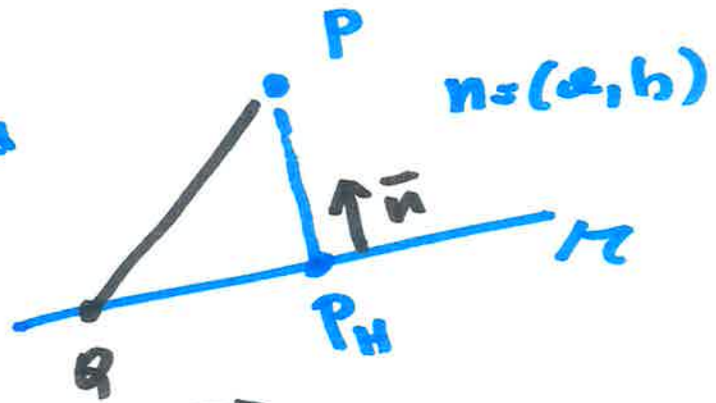
$$= (\vec{PP_H} + \vec{P_HQ}) \cdot (\vec{PP_H} + \vec{P_HQ}) =$$

$$= \| \vec{PP_H} \|^2 + \| \vec{P_HQ} \|^2 \Rightarrow$$

questo è minimo $\Leftrightarrow P_H = Q$.

$n=2$ $\quad P = (x_0, y_0)$ punto

$r: ax + by + c = 0$ retta



Sia $Q \in r$ ed osserviamo che $\vec{PP_H}$ = proiezione di

$\overrightarrow{PQ}$ sul vettore $\vec{n}$

$$\overrightarrow{PP_H} = \vec{n} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right)$$

ma se Q ha coordinate $(x_1, y_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

quindi $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)$

ma $ax_1 + by_1 = -c$ infatti $Q \in r$

quindi $ax_1 + by_1 + c = 0$

e dunque $\overrightarrow{PQ} \cdot n = -ax_0 - by_0 - c$

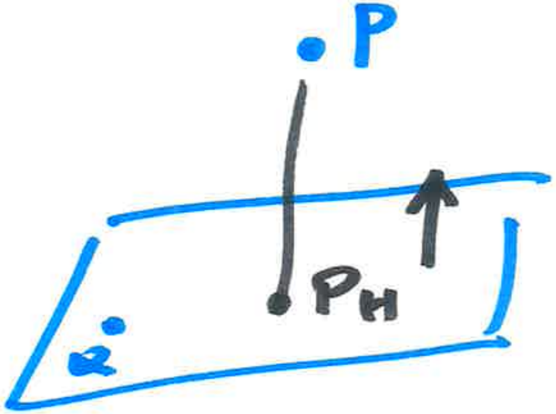
calcoliamo $\|\overrightarrow{PP_H}\| = \left\| (-ax_0 - by_0 - c) \cdot \frac{\vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right\|$

$$\|n\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= |(ax_0+by_0+c)| \frac{\|\bar{n}\|}{\bar{n}\cdot\bar{n}} =$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \square$$

$n=3$: formula distanza punto/piano



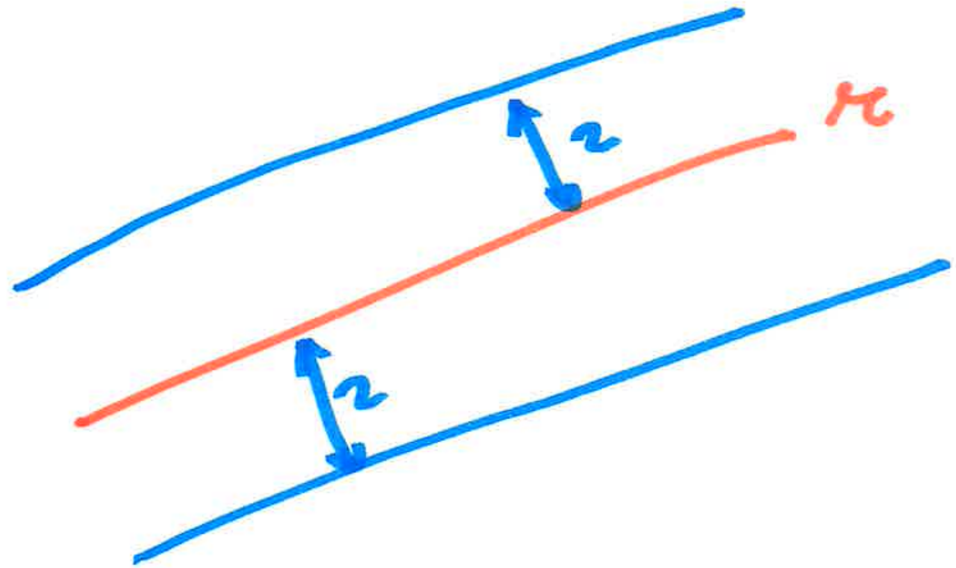
$$ax+by+cz+d=0$$

$$\vec{n} = (a\ b\ c)$$

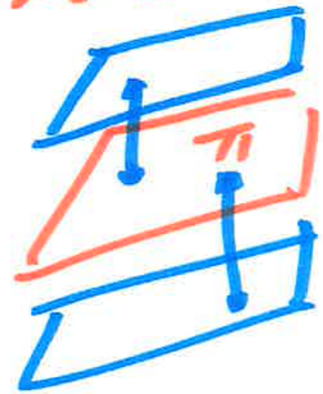
$$\overrightarrow{PP_H} = \bar{n} \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

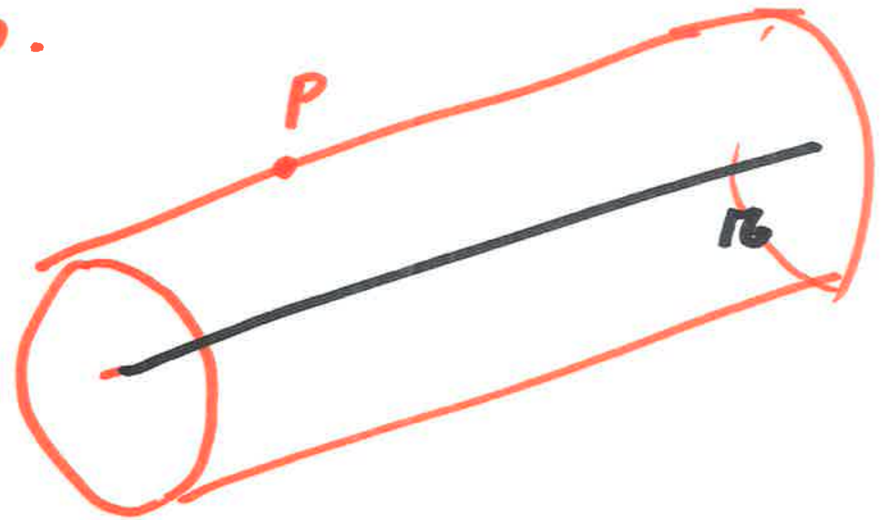
Se r_0 = retta e si chiede quale sia il luogo dei punti a distanza 2 nel piano da r_0



Se π piano e si chiede quale sia il luogo dei punti a $d=2$ da esso



Luogo dei punti a distanza 2 da una retta nello spazio.



cilindro retto a base circolare.

$$r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

un piano π è ortogonale alla retta r

$\Leftrightarrow$ esso ha eq. $a''x+b''y+c''z+d''=0$

con $(a''\ b''\ c'') \in \mathcal{L}((a\ b\ c),\ (a',b',c'))^{\perp}$

$$\left((a'\ b'\ c'),\ (a, b, c) \right)^{\perp} = \mathcal{L}\left((a''\ b''\ c'') \right)$$

ci fornisce la direzione della retta.

Un piano è ortogonale alla retta $\iff$ i suoi coeff. sono proporzionali ~~a quelli~~ ai parametri direttori (= coeff. della direzione) della retta stessa.

$$(a''\ b''\ c'') = (a, b, c) \times (a'\ b'\ c')$$

ottenete i coeff. del fascio improprio di piani $\perp$ alla retta r.

$P = (x_0\ y_0\ z_0)$ $\qquad a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + d'' = 0$

e ricavare d.

Risolvere $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$ e trovare P_H

$\Rightarrow d(P,r) = d(P,P_H)$.

$$d'' = -a''x_0 - b''y_0 - c''z_0$$

$$a''(x-x_0)+b''(y-y_0)+c''(z-z_0)=0$$

Esercizio: Si trovi il luogo dei punti a distanza $d=1$ dalla retta di $EG(3,\mathbb{R})$ di equazioni $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$P=(x_0\ y_0\ z_0)$: $d(P,r)=1$

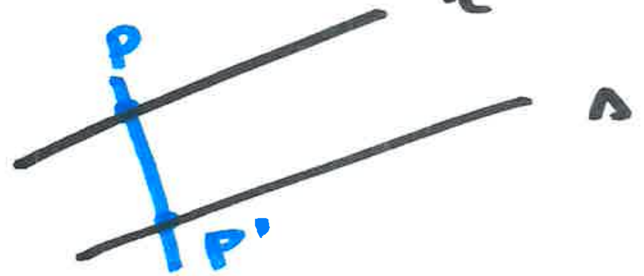
$(1\,0\,0)\times(0\,1\,0)=(0\,0\,1)$

$$\begin{cases}(z-z_0)=0\\ x=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}z=z_0\\ x=0\\ y=0\end{cases}$$

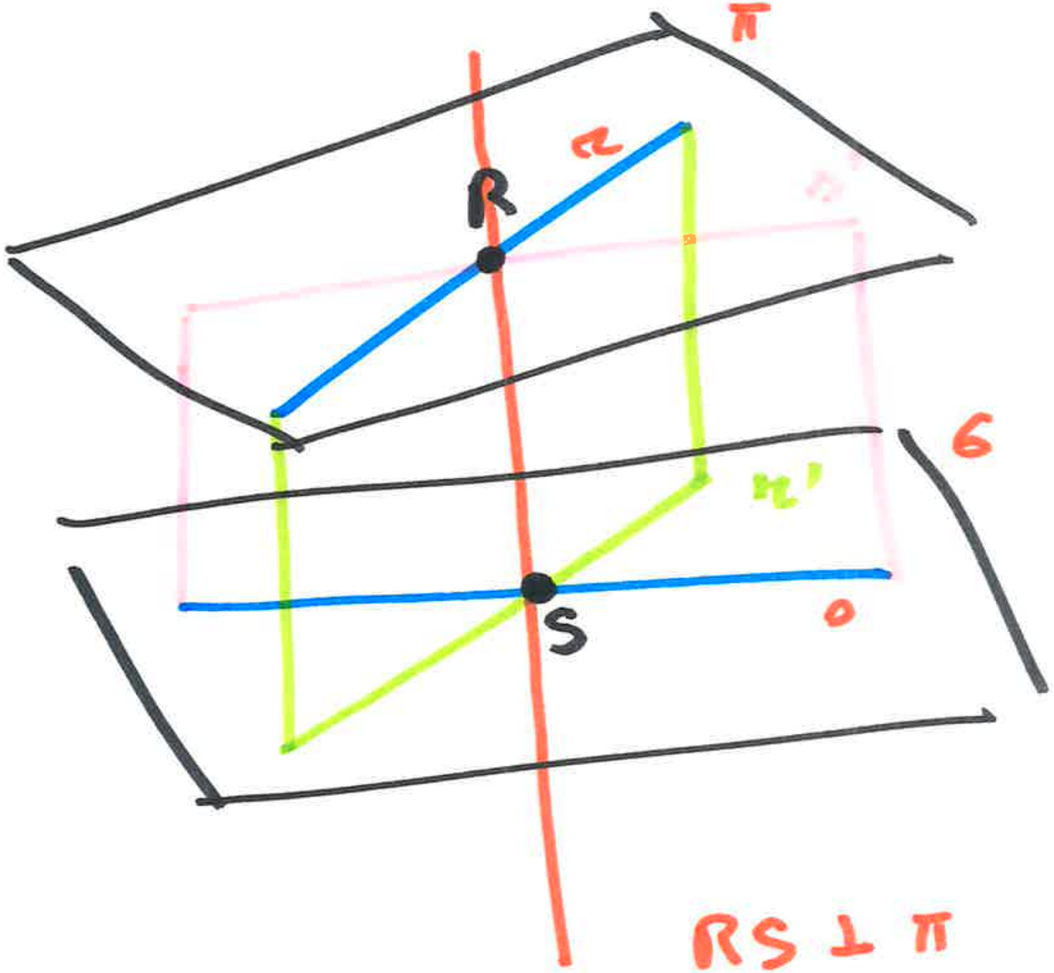
$$d((x_0,y_0,z_0),(0\ 0\ z_0))=1$$

$$x_0^2+y_0^2=1$$

DISTANZA FRA RETTE PARALLELE E FRA RETTE SGHEMBE.



$\forall P,Q \in r$: $d(P,s)=d(Q,s)$



$r \subseteq \pi$

$s \subseteq \sigma$ $\qquad \pi // \sigma$

$\forall P, Q \in \pi: \; d(P,\sigma) = d(Q,\sigma)$

$d(r,s) = d(\pi,\sigma)$

$RS \perp \pi$ $\qquad RS \cap r \neq \emptyset$

$RS \perp \sigma$ $\qquad RS \cap s \neq \emptyset$

In particolare per le prop. della proiez. ort. R ed S sono i punti di r e s più vicini. RS è detta retta di minima distanza.