Sotto quali ipotesi (per quali valori di $k \in \mathbb{R}$) il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 3 \\ (2+k)x + 4y + 10z = 8 \end{cases}$$

rappresenta una retta di $AG(3, \mathbb{R})$?

$$rk\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2+k & 4 & 10 \end{pmatrix} = 2$$

per $k \neq 4$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 3 \\ (2+k)x + 6y + 10z = 8 \end{cases}$$

$$rk\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2+k & 6 & 10 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\forall k$.

Una retta in $AG(3, \mathbb{K})$ è descritta dall'intersezione di 2 piani non paralleli!

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & k & 4+k \end{pmatrix}$$

Es 1: r_k è una retta $\forall k \in \mathbb{R}$ infatti $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$rk(A)$ e $rk(A|B)$.

$$rk(A) = 2 \iff \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix} = 0$$

$$= 9 - 3k^2 - 6 = 3(1-k^2)$$

per $k = \pm 1$ $rk(A) = 2$ e quindi $r_k \parallel \pi_k$

$k \neq \pm 1$ $rk(A) = 3 = rk(A|B) \Rightarrow r_k \cap \pi_k = \{P\}$.

→ Si considerino le possibili posizioni reciproche della retta $r_k \begin{cases} 2x+3y=5 \\ kx+z=0 \end{cases}$ e del piano $\pi_k: 3x+3y+kz=6+k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

→ Si considerino le possibili posizioni reciproche dei 3 piani

$\sigma: 2x+3y=5$

$\vartheta_k: kx+z=0$

$\pi_k: 3x+3y+kz=6+k$

$k=+1 \quad rk(A|B) = rk\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \qquad r \subseteq \pi$

$k=-1 \quad rk(A|B) = rk\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \qquad r \parallel \pi$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ma $r \cap \pi = \phi$.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ kx + z = 0 \\ 3x + 3y + kz = 4 + k. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & k & 4+k \end{pmatrix}$$

Se $K \neq \pm 1 \Rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 3$

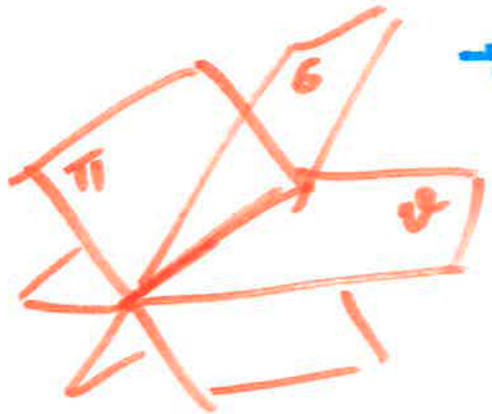
→ i tre piani si intersecano in un punto <u>proprio</u> ⇒ sono parte di una stella propria di piani.

$K = +1$ $\quad rk(A) = rk(A|B) = 2$ → i tre piani si intersecano in una retta.

⇒ essi sono parte di un fascio proprio di piani.

$K = -1$ $\quad$ oss: i 3 piani in questo caso sono distinti fra loro.

→ infatti rk di tutte le matrici che rapp. l'intersezione di 2 di loro è 2.

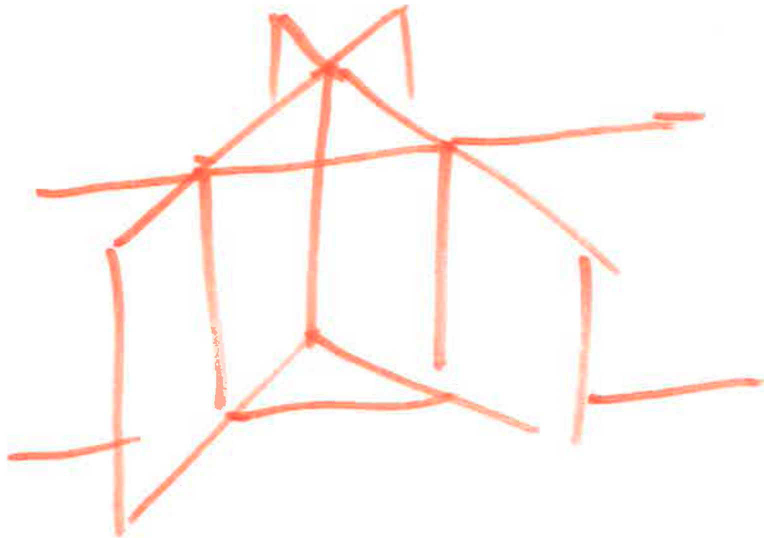


$k = -1$

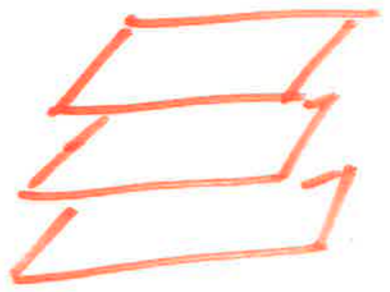
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (A|B)$$

$rk(A) = 2 \quad rk(A|B) = 3$

osserviamo che i 3 piani sono a 2 a 2 incidenti in una retta. → ~~ess~~ non ci sono 2 di essi paralleli. Formano una stella impropria.



possibilità per 3 piani che non si intersecano in un punto proprio.



3 piani paralleli

$rg(A)=1$

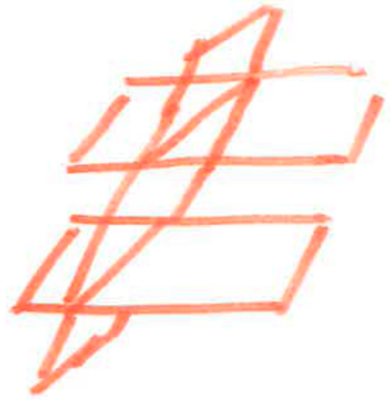
$rg(A|B)=2$

formano un fascio improprio.

↓

3 paralleli e distinti

2 coincidenti 1 parallelo ad essi.



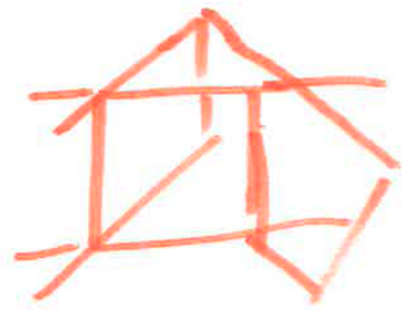
$rg(A)=2$

$rg(A|B)=3$

formano una stella impropria

2 sono paralleli ed 1 incidente.

ci sono 2 righe in A proporzionali



$rg(A)=2$

$rg(A|B)=3$

ma ogni 2 righe di A sono indipendenti

↓

stella impropria.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -k & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>oss</u> $k \neq 0$ per $k=0$ la II equazione non descrive un piano.

$rg(A)=2 \quad rg(A|B)=3$

$$rg\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -k \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 2 \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det(A) = k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -k & 1 \end{vmatrix} = -4+2k = 2(k-2).$$

per $k=2$ → $rg(A)=rg(A|B)=2 \Rightarrow$ i piani appartengono ad un fascio proprio.

per $k\neq 2$, $k\neq 0$ → i piani non hanno intersezione propria.

per $k=0$ → ~~i piani ss~~ non abbiamo 3 piani!!

per $k\neq 2,0$ osserviamo che i 3 piani non sono a 2 a 2 paralleli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ non paralleli.}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & k & -k & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ formano una stella impropria.

$$r_k \begin{cases} x - z = k - 1 \\ x + ky = 1 \end{cases} \qquad \pi_k : x + ky + z = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & k-1 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

OSS 1: $\forall k$ il rango delle prime 2 righe è 2 $\Rightarrow$
$\forall k$: r_k è una retta.

STUDIAMO $rk(A)$ vs $rk(A|B)$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} = 2k - k = k.$$

Se $k \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 3 = rk(A|B) \Rightarrow r_k \cap \pi_k = \{P\}$.

Se $k = 0 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rk(A) = 2$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow r_k // \pi_k \; ; \; r_k \cap \pi_k = \phi$.

$r: \; x + ky = k$

$s: \; x - y = -1$

$t: \; kx + (k-1)y = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \\ k & (k-1) & 1 \end{array}\right)$$

Se $rk(A) = 2 = rk(A|B) \Rightarrow$ le rette appartengono ad un fascio proprio.

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k-1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -1-k=0 \Rightarrow k=-1 \\ (k-1)-k^2=0 \quad k^2-k+1=0. \end{array}$$

$k = \cancel{\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}} \notin \mathbb{R}.$

$-k^2+k-1=0$ NON HA RADICI REALI.

$rg(A)=2$ $\qquad$ $rg(A|B)$

$$\begin{array}{c} r \\ s \\ t \end{array}\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \\ k & k-1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & k+1 & k+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 2k-1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k+1 & k+1 \\ 2k-1 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)\left[(k+1)-(2k-1)\right]$$

$$=(k+1)\left[-k+2\right].$$

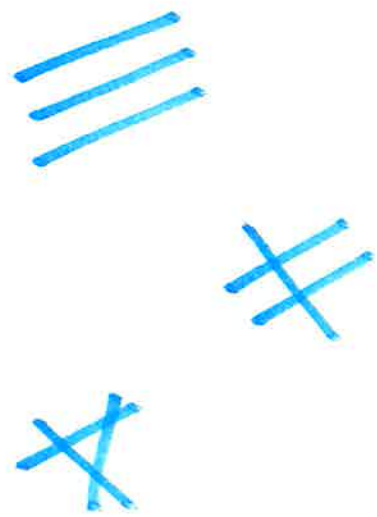
se $k=-1$ oppure $k=+2$ $\Rightarrow$ FASCIO PROPRIO.

$k=-1$ $\Rightarrow r=s$ e t incidente

$k=+2$ $\Rightarrow r \neq s \neq t$ sono 3 rette distinte.

$k \neq -1, 2.$

$$\begin{matrix} 1 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \\ k & k-1 & 1 \end{matrix}$$



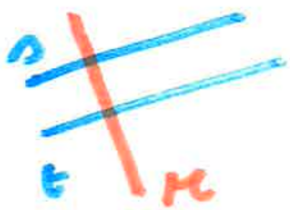
 $\Leftrightarrow rg(A) = 1$ ma $rg(A) = 2$ <u>No</u>

$r \sim s$ $\quad r \parallel s \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = -1$

$s \sim t$ $\quad s \parallel t \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k - 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

$r \sim t$ $\quad r \parallel t \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k - 1 - k^2 = 0$ <u>MAI</u>

se $k = \frac{1}{2} \Rightarrow s \parallel t$ $\quad s \neq t$



se $k \neq \frac{1}{2}, -1, 2$

$0=1$ nelle incognite (x, y, z)

π: di equazione $0=1$ $\rightarrow$ π non esiste.

$$r: \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 4x+4y+2z=0 \end{cases}$$ NON È UNA RETTA!

$[O; \mathcal{B}=(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})]$

r per $(1\ 0\ 2)$ e $(0\ 1\ -1)$

lo spazio di traslazione di r è generato dal vettore $\overrightarrow{PQ}$ che ha componenti rispetto a $\mathcal{B}$ date da $(0\ 1\ -1)-(1\ 0\ 2)=$
$=(-1\ 1\ -3)$.

La risposta corretta.

NON è $(-1\ 1\ -3)$ perché ci si chiede un sottospazio di dim = 1 e non una sua base.

NON è $\mathcal{L}((-1\ 1\ -3))$ perché ci si chiede un sottospazio di $V_2(\mathbb{R})$ e non le componenti dei vettori che vi appartengono.

È $\mathcal{L}(-\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})$

Base di spazio di traslazione $(-\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})$

In $A_3(\mathbb{R}) = AG(3,\mathbb{R})$ si determinino le eq. cartesiane dei piani paralleli che contengono

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

OSSERVARE CHE IL PIANO π per s parallelo ad un piano che contiene r deve contenere la direzione di r nella sua giacitura.

DIREZIONE DI r $\quad (1\ 1\ 0) \times (1\ -1\ -1) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-1 \cdot \bar{e}_1 + 1\,\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = (-1, +1 -2)$

$(-1, +1, -2)$ Deve essere soluzione di

$$\alpha(x+y+z) + \beta(z) = 0$$

Deve essere soluzione di una c. lineare delle eq. omogenee associate ad s.

$$\alpha(-1+1-2) + \beta(-2) = 0$$

$$\alpha = -\beta \qquad \alpha = 1 \quad \beta = -1$$

il piano per s parallelo ad r

è $1(x+y+z-1) + (-1)(z-1) = 0$

cioè $x+y=0$ OK.

troviamo adesso il corrispondente piano per r_2.

$$\gamma(x+y+1)+\delta(x-y-z-1)=0$$

$$(\gamma+\delta)x+(\gamma-\delta)y-\delta z+(\gamma-\delta)=0$$

affinché sia parallelo ad $(x+y)=0$

deve essere

$$rg\begin{pmatrix} \gamma+\delta & \gamma-\delta & \delta \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=1$$

$\delta=0,\ \gamma=\gamma \longrightarrow$ OTTENIAMO

$\gamma=2$ $\qquad x+y+1=0$