Studio delle posizioni reciproche di enti geometrici
(piani, rette).

Spazio Affine

$\downarrow$

sottospazi lineari $[P ; W_K]$

descritti da sistemi
lineari.

P soluzione
particolare

W_K soluzioni
del sistema
omogeneo
associato.

posizioni reciproche $\rightarrow$ studiare i sistemi che vengono
ad essere descritti.

a, b, c devono soddisfare

$$(*)\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } P \neq Q \Rightarrow \cancel{\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$rk\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow (*)$ ha ∞^1 soluzioni

tutte proporzionali fra loro

$\Rightarrow \exists!$ retta per P e per Q.

$n=2 \rightarrow$ piano $AG(2, \mathbb{K})$.

punti   rette

per ogni due punti distinti passa esattamente una retta. Data una retta r ed un punto P fuori da essa $\exists!$ retta s per P disgiunta da r ed $r // s$.

0) $\forall P, Q \,;\, P \neq Q \ \exists!\, r : r \supset \{P, Q\}$.

1) esistenza

Data r retta ed s tale che $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$.

$[P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$

$P = (x_1, y_1)$

$Q = (x_2, y_2)$

$r: ax + by + c = 0$ eq.

N.B. $\Rightarrow \alpha(ax + by + c) = 0 \quad \alpha \neq 0$

Dim 1) $r: ax+by+c=0$ $\quad$ $(\Delta)\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

$s: a'x+b'y+c'=0$

(Δ) deve essere incompatibile $\Rightarrow rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \ \& \ rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$ è un sistema di rango 1

e quindi le direzioni di r ed s sono le stesse.

<u>**Def**</u>: Sia $P \in AG(2,\mathbb{K})$ un punto. Si dice *fascio proprio di rette di centro P* l'insieme di tutte le rette del piano passanti per P.

Sia $r \subseteq AG(2, \mathbb{K})$ una retta. Si dice <u>fascio improprio</u> di direzione parallela ad r l'insieme di tutte le rette parallele ad r.

Ogni fascio consta di ∞^1 rette.

$ax + by + c = 0$ $\qquad$ $P = (x_1, y_1)$

risolvere il sistema $\qquad$ $ax_1 + by_1 + c = 0$

vi dà soluzioni in uno spazio vettoriale di dimensione $= 2$ $S = \mathcal{L}((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$.

~~Ma soluz~~ la retta generica del fascio si scrive come

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ $\qquad \alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

∞^2 equazioni ma eq. proporzionali danno la stessa retta $\Rightarrow$ ∞^1 rette.

<u>oss</u>: l'insieme S è generato da 2 qualsiasi suoi elementi indipendenti (cioè non proporzionali) ~~cioè~~ è generato da(lle equazioni) di 2 qualsiasi rette distinte del fascio.

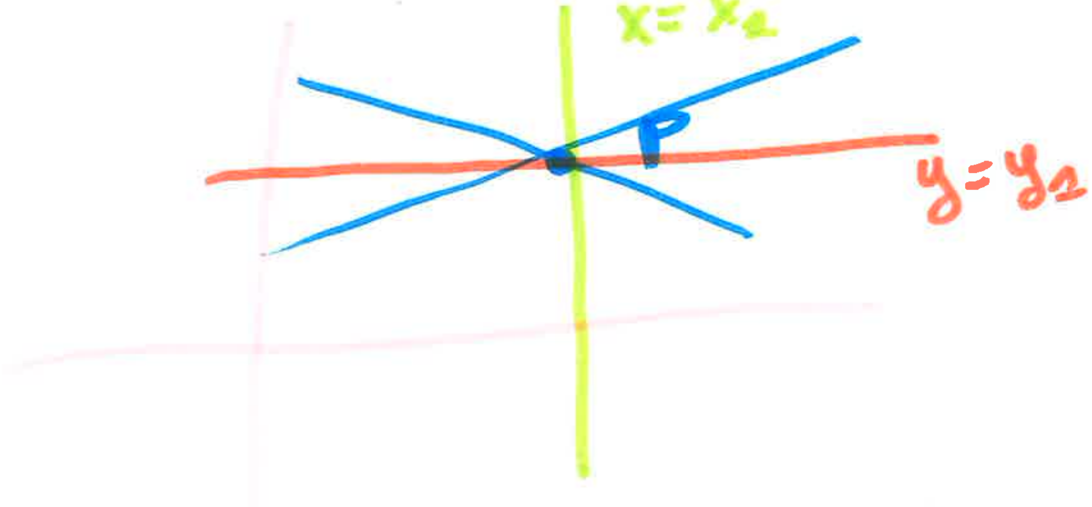
In particolare se noi conosciamo 2 di queste rette possiamo scrivere S senza dover risolvere il sistema lineare (di 1 equazione).

$P = (x_1, y_1)$ $\qquad r: x = x_1$ $\qquad s: y = y_1$

$$\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) = 0$$

$$\frac{(x-x_1)}{\beta} = \frac{y-y_1}{\alpha}$$

e (β, α) genera la direzione di t generica retta del fascio.



2) Fascio improprio: $\quad r: ax+by+c=0 \qquad W_r = \mathcal{L}((b,-a))$

$s /\!/ r$ se $s: a'x+b'y+c=0$ & $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

$$ab' - a'b = 0$$

OTTENIAMO ~~$S = \mathcal{L}((\,-b, a, c)$~~

$S = \mathcal{L}((a\ b\ c), (0\ 0\ 1))$

SOLUZIONI DI $\begin{cases} ab' - a'b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

SONO $\mathcal{L}((a\ b\ 0), (0\ 0\ 1))$.

∞^2 equazioni $\Rightarrow$ ∞^2 rette.

N.B. $(a, b, 0)$ rappresenta una retta parallela ad r

$(a\ b\ 0) + c(0\ 0\ 1) = (a\ b\ c)$ rappresenta ~~una retta~~ la retta r.

$(0\ 0\ 1)$ corrisponderebbe all'equazione

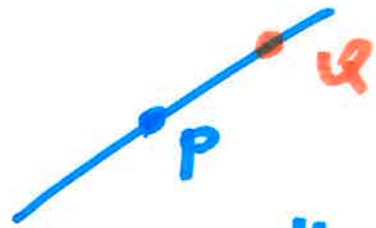
$0 = -1$

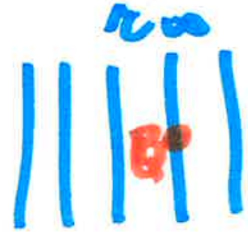
che non è una eq. di una retta in $AG(2, \mathbb{K})$.

Tutti gli elementi di S diversi da $\langle(0\ 0\ 1)\rangle$ rappresentano rette del fascio improprio parallelo ad r.

<u>oss</u>: Dato un fascio $\mathcal{F}$ ed un punto $Q \in AG(2, \mathbb{K})$

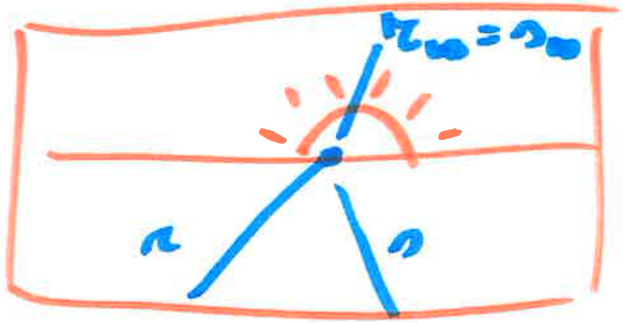
$\exists! \, r \in \mathcal{F} : Q \in r$. a meno che $\mathcal{F}$ non sia un fascio proprio di centro Q.





<u>Def</u>: chiameremo la direzione di una retta r ~~per~~ <u>punto</u>

improprio di r e la indicheremo con il simbolo r_∞ (anche "punto all'infinito").



$n=3$ spazio — punti rette piani.

posizioni reciproche

1) un piano è descritto da una classe di proporzionalità di equazioni del tipo

$$ax+by+cz+d=0$$

con $(a,b,c) \neq (0\ 0\ 0)$.

7) una retta è descritta da una classe di sistemi equivalenti del tipo

$$\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}=2.$

posizioni reciproche di 2 piani.

$ax+by+cz+d=0 \quad \pi \qquad (a\ b\ c)\neq(0\,0\,0)$

$a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad \sigma \qquad (a'\ b'\ c')\neq(0\,0\,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right]=(A|B)$$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
	1	1	∞^2	$\pi = \sigma$; $\pi // \sigma$
(*)	1	2	0	$\pi \cap \sigma = \emptyset$; $\pi // \sigma$
	2	2	∞^1	$\pi \cap \sigma = r$ retta.

in (*) le eq. omogenee associate a π e σ sono equivalenti (perché il sistema ha rango 1) $\Rightarrow$ stessa giacitura (cioè sott. di traslazione) $\Rightarrow$ $\pi // \sigma$

$\pi: \quad ax+by+cz+d=0$

$r \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$$

$(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
(Δ)	2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$
(*)	2	3	0	$r \cap \pi = \emptyset$ $\quad r // \pi$
	3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$.

(Δ) il sistema dato da r e da $r \cap \pi$ sono equivalenti.
$\Rightarrow$ ogni soluzione del sistema che descrive r è soluzione del sistema che descrive $r \cap \pi$ $\Rightarrow r \subseteq \pi$.

(*) il sistema omogeneo associato ad r e il sistema omogeneo associato a $r \cap \pi$ sono equivalenti $\Rightarrow$ se $r = [P; V_1]$ $\pi = [Q; W_2]$ abbiamo che $V_1 \leq W_2$ perché ogni soluzione del sistema omogeneo associato ad r è soluzione del sistema omogeneo associato ad $r \cap \pi$ e dunque anche dell'eq. omogenea di π $\Rightarrow r // \pi$

<u>OSS</u>: Se $\exists P, Q \in \pi \cap r$ con $P \neq Q \Rightarrow r \subseteq \pi$

Due rette nello spazio

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$s: \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \quad rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2.$$

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a' \end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a' \end{array}}\right\} s \end{array}$$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
	2	2	∞^1	$r = s$
(Δ)	2	3	0	$r \cap s = \emptyset$; $r // s$.
	3	3	1	$r \cap s = \{P\}$.
(*)	3	4	0	$r \cap s = \emptyset$ SGHEMBE.

Nel caso (Δ) i sistemi omogenei associati ad r ed s sono equivalenti (perché la matrice incompleta ha rango 2) e quindi le 2 rette hanno la stessa direzione $\Rightarrow r // s$

Nel caso (*) invece i sistemi lineari omogenei associati ad r ed s hanno come unica soluzione comune $\{\underline{0}\}$ $\Rightarrow$ r ed s hanno direzioni differenti $\Rightarrow$ r ed s sono <u>SGHEMBE</u>

<u>*Teorema*</u>: Due rette r ed s sono complanari (ovvero contenute in un unico piano) $\Leftrightarrow$ sono parallele o incidenti in un punto.

Altrimenti 2 rette sono dette sghembe.

Date 2 rette r, s sghembe $\exists! \, (\pi, \sigma)$ piani tali che $r \subseteq \pi$; $s \subseteq \sigma$ e $\pi // \sigma$.

<u>DIM</u>: Siano $r = [P; V_1]$; $s = [Q; W_1]$ due rette.

1) Se $r = s \Rightarrow$ ogni piano che contiene r contiene anche s $\Rightarrow$ prendiamo ad esempio il piano dato dalla prima eq. che descrive $s = r$. $\Rightarrow$ COMPLANARI.

2) Se $r \overset{r \neq s}{\parallel} s \Rightarrow$ consideriamo che $V_1 = W_1$.

Prendiamo il piano $[P; V_1 \oplus \mathcal{L}(\vec{PQ})] = \pi$

ed osserviamo che

$$\pi \cap r = [P; V_1 \oplus \mathcal{L}(\vec{PQ}) \cap V_1] = [P; V_1] = r$$

$Q \in \pi$

$$\pi \cap s =$$

$$= [P; V_1 \oplus \mathcal{L}(\vec{PQ})] \cap [Q; V_1] =$$

$$= [Q; V_1 \oplus \mathcal{L}(\vec{PQ})] \cap [Q; V_1] =$$

$$= [Q; V_1 \oplus \mathcal{L}(\vec{PQ}) \cap V_1] = [Q; V_1] = s$$

$r \subseteq \pi$; $s \subseteq \pi$.

3) Se $r \cap s = \{P\} \Rightarrow r = [P; V_1]\,;\, s = [Q; W_1]$

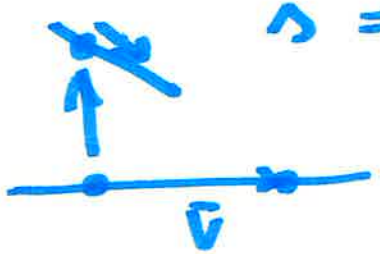
con $V_1 \neq W_1$

$\Rightarrow \pi = [P; V_1 \oplus W_1]$

4) Supponiamo r ed s con $r \cap s = \emptyset$ e $r \not\parallel s$

$r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$

$s = [Q; \mathcal{L}(\bar{w})]$



x $\exists \pi$ con π piano ed $r, s \subseteq \pi$.

allora per quanto visto nel caso di $\dim = 2$

dovrebbe essere $r \parallel s$ ma allora $\mathcal{L}(\bar{w}) = \mathcal{L}(\bar{v})$

$\lightning$ perché $\mathcal{L}(\bar{v}) \neq \mathcal{L}(\bar{w})$.

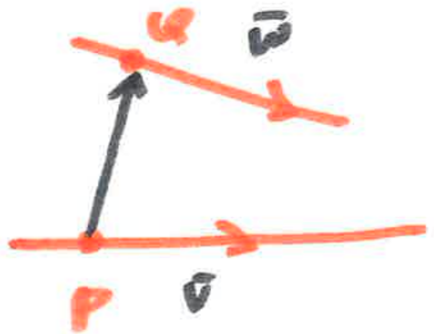
OSSERVIAMO CHE I VETTORI

$\overrightarrow{PQ}, \bar{v}, \bar{w}$ sono linearmente indip.

infatti se $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{v},\bar{w})$ con $\bar{v},\bar{w}$ indip

$(r \nparallel s)$

$\Rightarrow$



$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}$$

$$r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})] \ni S = P + a\bar{v}$$

$$s = [Q; \mathcal{L}(\bar{w})] \ni T = Q + b\bar{w}$$

$\exists (a,b)$ tali che $P + a\bar{v} = Q + b\bar{w}$

$$Q + b\bar{w} = P + \overrightarrow{PQ} + b\bar{w} =$$
$$= P + \alpha\bar{v} + (b+\beta)\bar{w}$$

$b = -\beta \quad a = \alpha$ otteniamo $S = T \in r \cap s$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \bar{v}, \bar{w}$ sono indipendenti.

Se $\exists$ un piano che contiene r ed s

$r = [P ; \mathcal{L}(\bar{v})] \quad s = [Q ; \mathcal{L}(\bar{w})] \quad P, Q \in \pi$

$\Rightarrow \pi = [P ; W_2]$ ma $\bar{v} \in W_2 \quad r \subseteq \pi$

$\bar{w} \in W_2 \quad s \subseteq \pi$

$\overrightarrow{PQ} \in W_2 \quad Q \in \pi$

ASSURDO PERCHÈ $\dim(W_2) = 2$

$\square$

OSS: $r \subseteq [P ; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})] \quad s \subseteq [Q ; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})]$

quindi $[P ; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})] \neq r$ e $[Q ; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})] \neq s$

sono 2 piani paralleli contenenti rispettivamente r ed s.

OSS: Un piano per r ~~che~~ tale che la sua giacitura contenga sia la direzione di r che quella di s è univocamente determinato, perché le 2 giaciture sono indipendenti.

Teorema: per 3 punti non allineati $\exists$ uno ed un solo piano.

DIM P, Q, R punti con $R \notin [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$

$\Rightarrow$ i vettori $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ sono indip.

$\pi = [P; \mathcal{L}(\vec{PQ}, \vec{PR})]$

se fosse σ con $\{P, Q, R\} \in \sigma = [X; W_2]$

$\Rightarrow P \in \sigma \Rightarrow \sigma = [P; W_1]$ $\quad Q, R \in \sigma \Rightarrow \vec{PQ}, \vec{PR} \in W_1$

$\Rightarrow \sigma = \pi$.

<u>DIM 2:</u>

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$P = (x_1\ y_1\ z_1)$

$Q = (x_2\ y_2\ z_2)$

$R = (x_3\ y_3\ z_3)$

NON ALLINEATI SIGNIFICA

CHE $R = P + \alpha(\vec{PQ})$

cioè che $\cancel{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}}$

$rg \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ il sistema $\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0 \end{cases}$

ha rango 3 $\Rightarrow \infty^2$ soluzioni

$\Rightarrow \exists!$ piano.

CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI 3 PUNTI NEL PIANO E NELLO SPAZIO.

$$P=(x_1, y_1)$$
$$Q=(x_2, y_2)$$
$$R=(x, y) \Rightarrow R \in [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (x_1, y_1) + \alpha(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \; y) - (x_1 \; y_1) = \alpha(x_2 - x_1 \;\; y_2 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\downarrow$$

$$rk(*) = rk \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ condizione di allineamento

$P = (x_1 \; y_1 \; z_1)$

$Q = (x_2 \; y_2 \; z_2)$

$R = (x \; y \; z)$

$\Leftrightarrow R \in [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})] \Leftrightarrow \overrightarrow{RP} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$

$\Leftrightarrow R - P = \alpha(Q-P) \Leftrightarrow$

$$rg\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\downarrow$

$$rg\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + rg\begin{pmatrix} x-x_1 \dots \\ x_2-x_1 \dots \end{pmatrix}$$

Fascio → collezione di ∞^1 enti geometrici

Stella → collezione di ∞^2 enti geometrici

<u>$n=3$</u>

- stelle di rette
  - tutte le rette per un punto
    ↓
    stelle proprie
  - tutte le rette parallele ad una retta data.
    ↓
    stelle improprie.
- stelle di piani
  - tutti i piani per un punto
    ↓
    stelle proprie
  - tutti i piani che sono paralleli ad una retta
    ↓
    stelle improprie.

Sia $P=(x_0, y_0, z_0)$ un punto.

→ imporre che un piano passi per P corrisponde ad 1 equazione nelle incognite $(a\ b\ c\ d)$

$$ax+by+cz+d=0$$

$\Rightarrow \infty^3$ soluzioni $\Rightarrow$ a meno di proporzionalità ∞^2 piani.

$$S = \mathcal{L}\left((1\ 0\ 0\ -x_0),\ (0\ 1\ 0\ -y_0),\ (0\ 0\ 1\ -z_0)\right).$$

$x-x_0=0$ $\quad$ $y-y_0=0$ $\quad$ $z-z_0=0$

Sia (l, m, n) una direzione
$\neq (0 0 0)$ $\quad r = [P; \mathcal{L}((l\ m\ n))]$

$ax + by + cz + d = 0$ è il piano

imponiamo $al + bm + cn = 0 \Rightarrow 1$ eq.

∞^3 soluz.

a meno di prop. ∞^2.

$S = \mathcal{U}\ (l, m, n, 0)^{\perp} \oplus \mathcal{L}((0 0 0 1))$. → NON CORRISPONDE ALL'EQ. DI UN PIANO

$(l\ m\ n\ 0)^{\perp}$ genera le soluzioni del sistema omogeneo associato al piano $(0 0 0 1)$ corrisponde a dire che d può assumere qualsiasi valore.

Stella di rette. $P = (x_0 \ y_0 \ z_0)$.

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$ sistemi che

ammettono $(x_0 \ y_0 \ z_0)$ come soluzione.

cerchiamo 2 soluzioni indipendenti
sotto la condizione che le incognite
$(a \ b \ c \ d)$ soddisfino $ax_0+by_0+cz_0+d=0$
cioè $(x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) \cdot (a \ b \ c \ d) = 0$

cerchiamo 2 eq. in $(x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1)^\perp$ ∞^3;

∞^2 elementi, a meno di equivalenza.

Stella di rette impropria

$$\mathcal{S}((l,m,n)).$$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$al+bm+cn=0$

$\downarrow$

condizioni analoghe.

Fasci:
- propri di piani $\rightarrow$ tutti i piani per una retta
- impropri di piani $\rightarrow$ tutti i piani che hanno una data direzione.

propri: $r : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

$\pi : a''x+b''y+c''z+d''=0$ $\quad r \subseteq \pi \iff$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2 \iff$$

$$\iff (a''\ b''\ c''\ d'') \in \mathcal{L}((a\ b\ c\ d),(a', b', c', d'))$$

$$\iff$$

$$\pi : \alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

combinazione lineare delle eq. che danno la retta <u>sostegno</u> del fascio.

Fascio improprio $\quad \pi = [P;\ \mathcal{L}((l\ m\ n),(p\ q\ r))]$

$$\begin{cases} al+bm+cn=0 \\ ap+bq+cr=0 \end{cases}$$

eq. del piano appartiene a

$$[(l\ m\ n\ 0),(p\ q\ r\ 0)]^{\perp} \cancel{+ \mathcal{L}((0\,0\,0\,1))}$$

~~NON RAPPRESENTA UN PIANO.~~

$$\cap$$

$$\mathcal{L}((a\ b\ c\ 0),(0\ 0\ 0\ 1)) =$$

$$= \mathcal{L}((a\ b\ c\ 0)) + \underbrace{\mathcal{L}((0\ 0\ 0\ 1))}_{}$$

NON RAPRESENTA UN PIANO

$$\alpha(ax+by+cz)+k\cancel{1}=0 \qquad k\in\mathbb{K}. \qquad \alpha\neq 0$$

$$ax+by+cz+k=0$$

$\square$