Data una matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ determinare se/quando M è diagonalizzabile ed in tale caso trovare una matrice diag. simile ad M e la rispettiva matrice diagonalizzante.

Teorema (della base spettrale). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ essa è simmetrica.

→ 1) A è diagonalizzabile

→ 2) A è diagonalizzabile con una matrice diagonalizzante ortogonale.

Esercizio 1) Determinare per quali valori di K la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Posto $K = 1$ (se diag), diagonalizzarla.

a) Trovare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & K & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & K-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(K-\lambda).$$

- Se $K \neq 1,2$ $\exists$ 3 autovalori distinti $1, 2, K$ con
$$\left.\begin{array}{l} m_a(1)=1 \\ m_a(2)=1 \\ m_a(K)=1 \end{array}\right] \Rightarrow$$ le molteplicità geometriche saranno anch'esse $=1$
$\Rightarrow$ la matrice è diagonalizzabile.

- Se $K=1 \Rightarrow \begin{array}{l} m_a(1)=2 \\ m_a(2)=1 \end{array}$

- Se $K=2 \Rightarrow \begin{array}{l} m_a(1)=1 \\ m_a(2)=2 \end{array}$

b) Trovare le molteplicità geometriche.

- Se $K \neq 1,2 \Rightarrow m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in Spec(A)$.
- Se $K=1 \Rightarrow m_g(2)=1 \qquad m_g(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I =$

$$= 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ $m_a(1) = m_g(1) = 2$

$\rightarrow$ LA MATRICE È DIAG.

- Se $K = 2 \Rightarrow m_g(1) = 1$

$$m_g(2) = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

DIAGONALIZZABILE.

---

c) Troviamo una matrice diagonalizzante per $k = 1$

Troviamo gli autospazi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \left\{ X \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} X = \underline{0} \right\} = \left\{ {}^{t}(x, y, z) : x + 2y = 0 \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\left((0\,0\,1), (-2\,1\,0)\right).$$

$$V_2 = \left\{ X \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \underline{0} \right\} = \cancel{\mathcal{L}(1\,0\,1\,0)}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid x = y,\ z = 0 \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\left((1\,1\,0)\right).$$

MATRICI DIAGONALE E DIAGONALIZZANTE

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1   2

base di V_1 Base di V_2

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ATT. È SBAGLIATO SCRIVERE

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{2}} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \underline{\underline{0}} & 0 & \underline{\underline{1}} \end{pmatrix}$$

<u>NO</u>.

GLI AUTOVETTORI NELLA MATRICE DIAGONALIZZANTE P DEVONO ESSERE NELLO STESSO ORDINE DEGLI AUTOVALORI IN D!

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>OSS:</u> Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice.

Se A possiede n autovalori distinti $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \lambda \in Spec(A) \quad m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$ e

$\sum m_g(\lambda) = \sum m_a(\lambda) = n$

$\Rightarrow A$ è sicuramente diagonalizzabile.

Spesso nelle applicazioni basta sapere quali sono gli autovalori (senza dover cercare la matrice diagonalizzante).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{C}^{3,3}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ k & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2+1)(k-\lambda).$$

OSS: Se la matrice fosse definita in $\mathbb{R}^{3,3} \Rightarrow$ NON SAREBBE MAI DIAGONALIZZABILE, PERCHÉ in $\mathbb{R}^{3,3}$ la matrice A ha un solo autovalore $\lambda = k$ con molteplicità algebrica (e quindi anche geometrica) $= 1$.

Su $\mathbb{C}$ invece abbiamo 3 radici

$$\mathrm{Spec}(A) = \{+i, -i, k\}.$$

1) $k \neq \pm i \Rightarrow$ 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

2) $k = +i$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rk}(A - iI) =$

$$= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$m_a(i) = 2 \neq m_g(i) = 1$$

NON DIAG.

3) $k = -i$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rk}(A + iI) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$$\Rightarrow m_a(-i) = 2 \neq m_g(-i) = 1$$

NON DIAGONALIZZABILE.

DATO $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ per quali k $(1\ 3\ -3)$ è autovettore e trovare l'autovalore corrispondente.

$(1\ 3\ -3)$ autovettore $\iff$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{cioè } rk\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 1$$

devono essere proporzionali!

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3k-3 \\ 3(2+k)-3\cdot 4 \\ 3\cdot 4-3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-2 \\ 3k-6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

quando è prop. a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-2 \\ 3k-6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3k-2=-2 \\ 3k-6=-6 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow k=0 \quad \& \quad \lambda=-2$$

$$rk\begin{pmatrix} 3k-2 & 1 \\ 3k-6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow k=0 \quad \Rightarrow \lambda=-2. \quad \square$$

quando $A_K = \begin{pmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ort. diag.

e diag per $K=2$

1) A_K ort. diag $\Leftrightarrow A_K = {}^tA_K \Leftrightarrow K=1$

2) DIAGONALIZZARE $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-2\right] =$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda^2(\lambda-3)$$

$m_a(0) = 2 = m_g(0)$

$m_a(3) = 1 = m_g(3)$

$rk(A) = rk(A - 0I) = 1$

$\Rightarrow m_g(0) = 2$

LA MATRICE È DIAGONALIZZABILE.

$$V_0 = \{ X \mid AX = \underline{0} \} = \{ (x\ y\ z) \mid 2x + z = 0 \} =$$

$$= \mathcal{L}((0\,1\,0), (-1\,0\,2)).$$

$$V_3 = \{ X \mid (A - 3I) X = \underline{0} \} = \left\{ (x\ y\ z) \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}$$

$$= \{ (x\ y\ z) \mid y = 0,\ z = x \} =$$

$$= \mathcal{L}((1\,0\,1)).$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

$A:=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}$ quando $(k-1,\ k+1,\ 1)$ autovettore.

- APPROCCIO 1

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k-1\\k+1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}k-1\\k+1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\2k-2-k-1+1\\-2k+2+k+1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{0}\\+k-2\\-k+2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\boxed{k-1}\\k+1\\1\end{pmatrix}$$

- $\lambda=0$; $k-1\in\mathbb{R}$
- $\lambda\neq 0$ $\quad k-1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ impossibile
- $\lambda=0 \Rightarrow k=+2 \Rightarrow$ $\underline{\text{OK}}$

• APPOCCIO 2 .

$$rk\begin{bmatrix} 0 & k-1 \\ k-2 & k+1 \\ -k+2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ -k+2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)=0$$

$$k=1 \text{ o } k=2$$

$$\det\begin{pmatrix} k-2 & k+1 \\ -k+2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\downarrow$

per $k=1$ $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rk=2$

per $k=2$ $\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow rk=1$

<u>ok</u>

• APPROCCIO 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rk(A) = 1$$

Autovalori: $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \left[(\lambda+1)^2 - 1 \right] = \cancel{\lambda(\lambda(}$$

$$= -\lambda^2(\lambda+2)$$

$m_a(0) = 2 = m_g(0)$

$m_a(-2) = 1$

$$V_0 = \{ (x\, y\, z) \mid 2x - y + z = 0 \} = \mathcal{L}\left((1,2,0), (0,1,1) \right)$$

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \mid x = 0,\ y = -z \right\}.$$

$$= \mathcal{L}\left((0\,1, -1) \right).$$

Diagonalizzabile $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$(k-1, k+1, 1) \in V_0$? $\quad rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 2 & 1 & k+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ conti.

$\underbrace{}_{V_0}$

$(k-1, k+1, 2) \in V_{-2}$?

$rk \begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ 1 & k+1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$ conti.

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (k-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - (k+1) + 2(k-1) = 2k - 2 + 1 - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k - 2 = 0 \quad k = 2$$

<u>OK</u>

$$\cancel{\begin{vmatrix} 0 & k-1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} = 0}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} 1 & k+1 \end{vmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & k-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow k = 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k + 2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = -2 \end{array}\right] \text{4y}$$

Teorema della base spettrale. $\mathbb{R}$

1) Teorema spettrale: gli autovalori di una matrice reale e simmetrica sono tutti reali.

2) Teorema d. base s.: una matrice è ortogonal. diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ è reale e simmetrica

<u>DIM</u> DI 1.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice con $A = A^T$.

Allora A sicuramente ha degli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ in quanto vale il teorema fondamentale dell'algebra ed il polinomio caratteristico di A $\det(A-\lambda I)$ si fattorizza in $\mathbb{C}$ (in particolare ha n radici su $\mathbb{C}$).

→ Vogliamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ cioè che $\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A) : \lambda = \bar{\lambda}$

Sia $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)$ e sia $X \neq \underline{0}$ un autovettore (complesso) di autovalore λ. $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$

calcoliamo

$\cancel{\lambda {}^T\bar{X} X}$ $\quad \lambda {}^T X \bar{X} = {}^T(\lambda X)\bar{X} = {}^T(AX)\bar{X} =$

$$= ({}^T X\, {}^T A)\bar{X} = {}^T X (A\bar{X}) =$$

• $\overset{\bullet}{=}$ perché $A = {}^{T}\!A$

• $\overset{\bullet}{=}$ perché $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\Rightarrow \bar{A} = A$

$$\overset{\bullet}{=} {}^{T}\!X(\bar{A}\bar{X}) = {}^{T}\!X\,\overline{(AX)} =$$

$$= {}^{T}\!X\,\bar{\lambda}\,\bar{X} =$$

$$= \bar{\lambda}\,{}^{T}\!X\bar{X}$$

$$\boxed{\lambda\,{}^{T}\!X\bar{X} = \bar{\lambda}\,{}^{T}\!X\bar{X}}$$

ma se ${}^{T}\!X = (x_1 \dots x_n) \Rightarrow {}^{T}\!X\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{x}_j$

e questo se $x_j = a_j + i b_j$ $\quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_j\bar{x}_j = (a_j^2 + b_j^2) \geq 0$

ed è $= 0 \Leftrightarrow \forall j : a_j = b_j = 0$

$\Rightarrow {}^{T}\!X\bar{X} \neq 0 \Rightarrow$ DIVIDENDO $\lambda = \bar{\lambda}$ $\square$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 11 \\ 2 & 0 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Vogliamo ora dimostrare le condizioni sulla ortogonale diagonalizzabilità.

1) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogon. diag. $\Rightarrow \exists P$ con $P^{-1} = {}^{T}P$ tale che

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow$$

$${}^{T}PAP = D \Rightarrow \text{trasponendo tutto}$$

$${}^{T}P\,{}^{T}A\,P = {}^{T}D = D \Rightarrow$$

$${}^{T}PAP = {}^{T}P\,{}^{T}A\,P$$ e moltiplicando

a sx per ${}^{T}P^{-1} = P$ e a dx per $P^{-1} = {}^{T}P$

abbiamo $A = {}^tA \Rightarrow A$ simmetrica.

2) Viceversa.

Supponiamo A reale e simmetrica $\Rightarrow$

$$A = {}^tA.$$

per il teorema spettrale A ammette almeno un autovalore reale λ e sia X_0 il corrispondente autovettore reale.

$$AX_0 = \lambda X_0.$$

1) Se A è una matrice 1×1 non c'è nulla da dimostrare: A è diagonale e una matrice ort. diagonalizzante è data da (a).

di tali vettori rispetto la base canonica.

CALCOLIAMO

$$
{}^{T}PAP = \begin{bmatrix} {}^{T}X_0 \\ {}^{T}y_1 \\ \vdots \\ {}^{T}y_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} {}^{T}X_0 A X_0 & {}^{T}X_0 A y_1 & \cdots & {}^{T}X_0 A y_n \\ {}^{T}y_1 A X_0 & {}^{T}y_1 A y_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ {}^{T}y_n A X_0 & & & {}^{T}y_n A y_n \end{bmatrix} =
$$

7) Supponiamo che tutte le matrici reali e simmetriche di ordine $(n-1)\times(n-1)$ siano ortogonalmente diagonalizzabili $\Rightarrow$ faremo vedere che lo sono anche le $(n \times n)$.

$\rightarrow$ partiamo dal vettore X_0 ed osserviamo che è un vettore $\neq \underline{0}$ di $\mathbb{R}^n$.

completiamo a base X_0 di $\mathbb{R}^n$ di modo tale da avere una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale ~~ortogonale~~ ~~che~~ ~~alo~~ rispetto il prod. scalare euclideo. Sia $(X_0, y_1 \dots y_n)$ tale base e sia P la matrice che ha come colonne esattamente le componenti

$$= \begin{bmatrix} S\,{}^{T}X_0 X_0 & S\,{}^{T}X_0 y_2 & \cdots & S\,{}^{T}X_0 y_n \\ {}^{T}y_2 S X_0 & & & \\ \vdots & & & \\ {}^{T}y_n S X_0 & & & \end{bmatrix} = *$$

ma i vettori $y_2 \ldots y_n$ sono ortogonali rispetto lo spazio generato da X_0 $\Rightarrow$

$${}^{T}X_0 y_j = 0 \text{ come pure } {}^{T}y_j X_0 = 0$$

visto che il prodotto scalare std. é simmetrico.

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda\, {}^T X_0 X_0 & 0\ 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right]$$

in P possiamo scegliere X_0 tale che ${}^T X_0 \cancel{X}_0 = 1$

$\Rightarrow$ con questa normalizzazione (ponendo

$$X_0' \leftarrow \frac{X_0}{\|X_0\|})$$

abbiamo $${}^T P' A P' = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0\ 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right]$$

<u>oss</u>: $A' \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$

Inoltre ${}^{T}A' = A'$ infatti l'entrata (i,j) di A'

è $\quad {}^{T}y_i A y_j = {}^{T}({}^{T}y_i A y_j) = ({}^{T}y_j \, {}^{T}A y_i) =$

$= ({}^{T}y_j A y_i) =$

entrata (j,i).

Ne segue per ipotesi induttiva che $\exists\, Q \in GL(n-1, \mathbb{R})$ con ${}^{T}Q = Q^{-1}$ tale che

$${}^{T}Q A' Q = Q^{-1} A' Q = D' \text{ matrice diagonale.}$$

PONIAMO $\quad Q' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$

e calcoliamo

$$ {}^{T}Q' \, ({}^{T}P' A P') \, Q' = $$

$$ = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^{T}Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = $$

$$ = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^{T}Q A' Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right] $$

matrice diagonale.

FACCIAMO VEDERE CHE $(P'Q')$ è una matrice ORTOGONALE.

$$ {}^{T}P' = P'^{-1} \qquad {}^{T}Q' = Q'^{-1} $$

$${}^T(P'Q')\cdot(P'Q') =$$

$$= {}^TQ'\,{}^TP'P'Q' = {}^TQ'\,P'^{-1}P'Q' = {}^TQ'Q' = I$$

quindi $(P'Q')$ é una matrice che è ortogonale

e poiché

$$D = {}^T(P'Q')A(P'Q') = (P'Q')^{-1}A(P'Q')$$

essa diagonalizza A $\square$

OSSERVAZIONE/CONSEGUENZA:

1) Sia A una matrice reale e simmetrica.
Allora gli autospazi di A sono in somma diretta ortogonale. (rispetto il prod. scalare std.)

DIM (idea):

prendiamo $\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Rightarrow$ calcoliamo V_λ e poi osserviamo che rispetto una base ortonormale che inizia con i vettori di una base di V_λ si può scrivere

$$P_0^{-1} A P_0 = {}^T P_0 A P_0 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right]$$

con A_1 reale e simmetrica.

ragionate su A_1 e costruite una matrice analoga a P_0 per essa, diciamo P_1 e poi

$$P_1' = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right] \quad \text{etc etc.} \quad P_0 P_1$$

1) Sia A la matrice di un prod. scalare

$\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}$ tale che rispetto a $\mathcal{B}$

la matrice $\quad {}^{t}PAP = P^{-1}AP$

(P ortogonale) è diagonale.

In particolare le prop. del prod. scalare sono caratterizzate dagli autovalori di A.

→ se il prod. scalare è definito positivo $\Rightarrow$

$\forall$ autovalore di A è > 0.

se è definito negativo $\forall$ autovalore di A

è < 0.

Inoltre, per i prodotti scalari possiamo anche dividere ogni vettore dato della base $\mathcal{B}$ per ~~il quadrato della sua~~ norma (a meno che essa non sia $= 0$) rispetto prod. scal. std.

→ possiamo riassumere le proprietà "invarianti" rispetto il cambiamento di base" del prod. scalare che ha come matrice A semplicemente dando i segni degli autovalori di A

→ $(+\,+\,+)$ Def pos. $\quad (+\,+\,-)$ NON DEG

$(-\,-\,-)$ Def neg. $\quad (+\,+\,0)$ DEG.

1) prod. scalare *

2) scrivere matrice A di * rispetto base canonica.

3) DIAGONALIZZATE A → si può fare perché si diag. ortogonalmente $P^{-1} = {}^tP$

4) NORMALIZZATE I VETTORI OTTENUTI. RISPETTO P. SCAL. STD.

→ OTTENETE UNA MATRICE CON SOLE ENTRATE SU DIAG. PRINC. (0, +1, −1).

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ → se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$

$\exists$ una matrice D simile ad A

→ NELLA CLASSE DI SIMILITUDINE DI A

c'è almeno un rappresentante "semplice"

dato da D.

→ se si chiede solamente una matrice

"semplice" simile ad A si scrive D.

→ se A non è diagonalizzabile che si fa?

DUE OSTRUZIONI POSSIBILI.

1) $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathbb{K}$

alcuni autovalori non $\in \mathbb{K}$.

→ si valuta se lavorare sulla chiusura

algebrica di $\mathbb{K}$.

Es. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \quad Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{+i, -i\}$

Su $\mathbb{R}$ non diag

Su $\mathbb{C}$ simile a $\begin{bmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{Q}$

$+\lambda^2 - 2 = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{2}$

NON DIAG. su $\mathbb{Q}$ ma DIAG su $\mathbb{R}$.

2) abbiamo almeno un $\lambda \in Spec(A)$ con

$m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) =$

$= (1-\lambda)^2$

$m_a(1) = 2$ $m_g(1) = 1$

→ Si cercano delle forme canoniche.

Forma canonica di Jordan.

$$B_{\lambda,n} := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

1) la matrice $B_{\lambda,n}$ è diag $\iff n = 1$

2) Teorema ogni matrice in $\mathbb{C}^{n,n}$ è simile

ad una matrice diagonale a blocchi del tipo

$$\left[\begin{array}{c|c|c} B_{\lambda_1, n_1} & & \\ \hline & B_{\lambda_2, n_2} & \\ \hline & & \ddots \; B_{\lambda_k, n_k} \end{array}\right]$$

ove i λ_i sono autovalori della matrice e $\sum n_i = n$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

$m_a(1) = 4$

$m_g(1) = 3$

Si scriva una matrice 4x4 con autovalori 1, 2, 3 non diagonalizzabile

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

con $m_a(1) = 3$ $m_g(1) = 1$ $m_a(2) = m_a(3) = 1$

4x4 non esiste.

5x5

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|c} 1 & 0 & & & \\ \hline 0 & 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & & \\ \hline & & & \boxed{2} & \\ & & & & \boxed{3} \end{array}\right)$$

Geometria Analitica.

→ introdurla a partire dagli s.vettoriali.

Vogliamo definire la nozione di <u>spazio affine</u> come ambiente geometrico.

Idea: Si prende uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$ e si definiscono come enti geometrici (punti, rette, piani) i traslati dei sottospazi di $V_n(\mathbb{K})$.

ove DATO $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ e $W \leq V_n(\mathbb{K})$

$$\bar{v} + W = \{\bar{v} + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\}.$$

in particolare

1) punti = TRASLATI DI $\{\underline{0}\}$.

2) rette = TRASLATI DI $r_0 \subseteq V_n(\mathbb{K})$

$\dim r_0 = 1$

3) piani = TRASLATI DI $\pi_0 \subseteq V_n(\mathbb{K})$

$\dim \pi_0 = 2$

etc. etc.