Def: Una sequenza di vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ è detta <u>ortonormale</u> se $\forall i,j = 1 \dots k$ abbiamo

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

OSS: Una sequenza ortonormale è sempre libera.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{e}_i = \underline{0} \qquad \text{con } (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k) \text{ ORTONORMALE}$$

$$\Rightarrow \alpha_j = \bar{e}_j \cdot \sum_i \alpha_i e_i = \sum \alpha_i (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i) = \bar{e}_j \cdot \underline{0} = 0. \qquad \square$$

Esercizio: Sia b la forma bilineare $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ descritta dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =: M$

Si determini una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

→ ALGORITMO (G/Schmidt).

→ ~~[illegible]~~

TROVIAMO UNA BASE ORTOGONALE (e poi, se possibile) normalizziamo.

$$(1\;0)\cdot M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\;2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \qquad \bar{e}_1 \text{ versore}$$

$\bar{e}_2$ ed osserviamo che $(1\,0)M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\bar{e}_2 = \bar{u}_{\parallel} + \bar{u}_{\perp}$ con $u_{\perp}$ ortogonale ad $\bar{e}_1$

$u_{\parallel}$ parallelo ad $\bar{e}_1$

$$\bar{u}_{\parallel} = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \bar{e}_1 = \frac{2}{1} \bar{e}_1$$

$$\bar{u}_{\perp} = \bar{e}_2 - \bar{u}_{\parallel} = (0\ 1) - \cancel{1}\,2(1\ 0) = (-2, 1).$$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' = \bar{e}_1,\ \bar{e}_2' = (-2, 1))$ base ortogonale.

$$\bar{e}_1'' = \frac{\bar{e}_1'}{\|\bar{e}_1'\|} = \bar{e}_1' = (1\ 0)$$

$$\bar{e}_2'' = \frac{\bar{e}_2'}{\|\bar{e}_2'\|} = (-2\ 1) \cdot \left((-2, 1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = (-2\ 1).$$

$$(0\ 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\bar{u}_{\parallel}$ é la proiezione ortogonale di $\bar{e}_2$ su $\bar{e}_1$

in particolare $\frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}$ è il coeff. di Fourier di $\bar{e}_2$ risp. $\bar{e}_1$

$\mathcal{B}'' = ((1,0), (-1,1))$ ortonormale rispetto prod. scalare definito da M.

<u>NON</u> rispetto prod scalare standard.

$\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

Algoritmo di ortogonalizzazione. (Gram/Schmidt).

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$.

e sia $\bullet$ un prod. scalare non degenere.

$\Rightarrow$ è sempre possibile costruire una base ortogonale di $V_n(\mathbb{K})$.

1) prendiamo $\bar{e}_1' \leftarrow \bar{e}_1$

2) ad $\bar{e}_2$ sottraiamo la proiez. ortogonale di $\bar{e}_2$ su $\bar{e}_1'$

$$\bar{e}_2' \leftarrow \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1'}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1'$$

3) ad $\bar{e}_3$ sottraiamo la ~~sua~~ proiez. ortogonale su $\bar{e}_1'$ ed $\bar{e}_2'$.

$$\bar{e}_3' \leftarrow \bar{e}_3 - \frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1'}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' - \frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2'}{\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_2'} \bar{e}_2'$$

⋮

ad ~~a~~ $\bar{e}_K$ sostituiamo.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{e}_K' &\leftarrow \bar{e}_K - \frac{\bar{e}_K \cdot \bar{e}_1'}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' - \dots - \frac{\bar{e}_K \cdot \bar{e}_{K-1}'}{\bar{e}_{K-1}' \cdot \bar{e}_{K-1}'} \bar{e}_{K-1}' \\ &= \bar{e}_K - \sum_{j<K} \frac{\bar{e}_K \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j' \end{aligned}}$$

Si vede come esercizio che gli $\bar{e}_K'$ $K=1 \dots n$ sono ancora una base di $V_n(\mathbb{K})$

Inoltre ogni 2 vettori di questa base sono ortogonali fra loro.

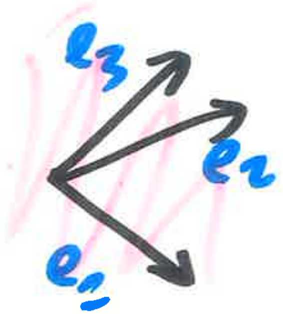
CALCOLIAMO PER INDUZIONE

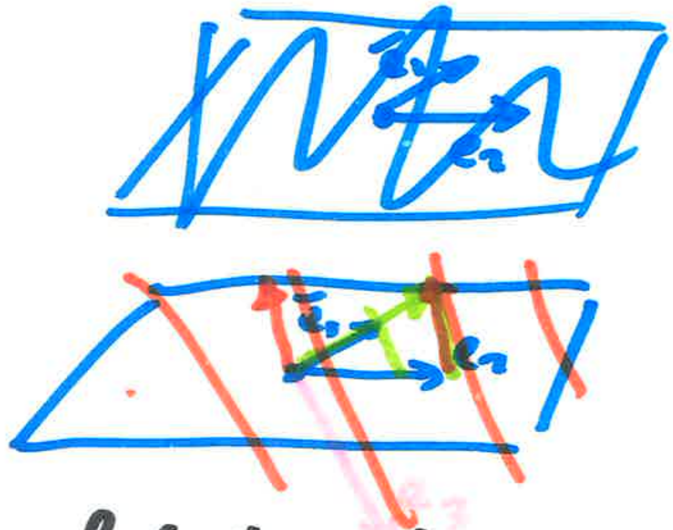
$k=2$ vale;

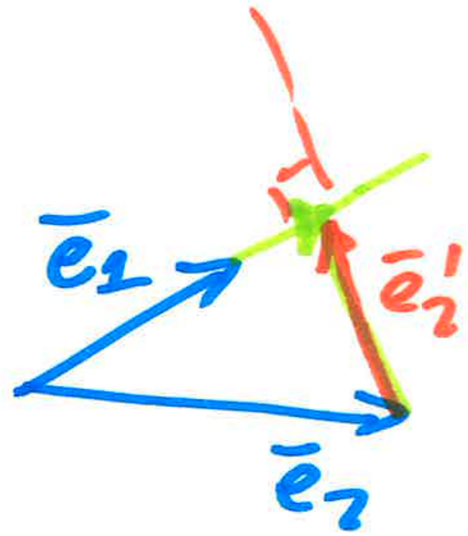
$$\bar{e}_k' \cdot \bar{e}_j' = \left(\bar{e}_k - \sum_{j<k} \frac{\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j' \right) \cdot \bar{e}_j' = \qquad j<k$$

$$= \left(\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j' - \frac{\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j' \right) = 0$$

□







<u>OSS</u>: il vettore $\bar{e}_k' \in \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_{k-1}', \bar{e}_k)$ ma anche $\bar{e}_k \in \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_{k-1}', \bar{e}_k')$

Quindi $(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_k')$ ed $(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_{k-1}' \, \bar{e}_k)$ generano lo stesso spazio vettoriale.

<u>Teorema</u>: Consideriamo la base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e la base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ ottenuta come prima.

$\Rightarrow \forall\, i$ con $1 \leq i \leq n$ si ha

$$\boxed{\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i) = \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_i')}$$

N.B. In generale $\mathcal{L}(\bar{e}_2, \bar{e}_3) \neq \mathcal{L}(\bar{e}_1', \bar{e}_3')$

DATA UNA BASE ORTOGONALE, PER OTTENERE UNA BASE ORTONORMALE SI DIVIDE OGNI VETTORE (se possibile) per la radice quadrata del suo prodotto scalare per se stesso

$\mathcal{B} = \text{base } (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ con $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i \neq 0 \ \forall i$

$\downarrow$

$\mathcal{B}' = \text{base } (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ con $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ se $i \neq j$

$\downarrow$ se $\boxed{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i = \alpha \neq 0 \text{ con } \exists \beta \in \mathbb{K} : \alpha = \beta^2}$

$\mathcal{B}'' = \text{base } (\bar{e}''_1 \dots \bar{e}''_n)$ ove $\bar{e}''_i = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i}} \bar{e}'_i$

N.B. $\bar{e}''_i \cdot \bar{e}''_i = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i}} \bar{e}'_i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i}} \bar{e}'_i = 1$

(se -1 non è un quadrato)

$\mathcal{B} \rightarrow$ base di partenza

$\mathcal{B}' \rightarrow$ base ortogonale

$\mathcal{B}'' \rightarrow$ base ortonormale

(procedimento di Gram-Schmidt).

ci serve che il prod. scalare di un vett. per se stesso sia un quadrato.

<u>Def</u>: Un prodotto scalare $V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è detto <u>definito positivo</u> (Euclideo) se $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$: $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$ e $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$

CONSEGUENZA: Dato uno sp. vett. con reale con prod. scalare definito positivo ed una sua base $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ è sempre possibile ortonormalizzare $\mathcal{B}$ con il proc. di Gram-Schmidt.

Def: Dato un prod. scalare Euclideo in $V_n(\mathbb{R})$ si pone $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$

$$\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$$

NORMA Euclidea (NORMA-2)

NOTIAMO CHE

$$\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \|\alpha \bar{v}\| = \sqrt{\alpha \bar{v} \cdot \alpha \bar{v}} = |\alpha| \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |\alpha| \, \|\bar{v}\|$

La norma di un vettore è una buona def. di "lunghezza" dello stesso.

__Def.__: Una funzione $V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ si dice norma se. $\|\bar{v}\|_\circ$

1) $\|\bar{v}\|_\circ = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$
2) $\|\bar{v}\|_\circ \geq 0 \quad \forall \bar{v} \in V.$
3) $\|\alpha\bar{v}\|_\circ = |\alpha| \, \|\bar{v}\|_\circ$
4) $\|\bar{v}+\bar{w}\|_\circ \leq \|\bar{v}\|_\circ + \|\bar{w}\|_\circ$ (dis. triangolare).

Vedremo che la norma euclidea soddisfa anche (4).

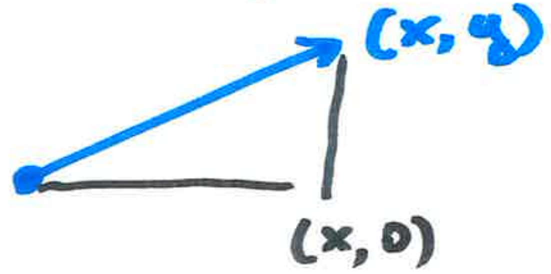
Esempi di norme non euclidee sono

$$\|\bar{v}\|_\infty = \sup |v_i| \qquad \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{v} = (v_1 \dots v_n).$$

$$\|\bar{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

In $\mathbb{R}^2$ con prod. scalare std.

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{(x,y)\cdot(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

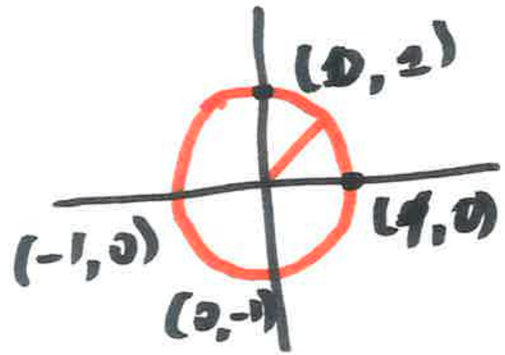


$$\|(2,5)\|_2 = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \leftarrow$$

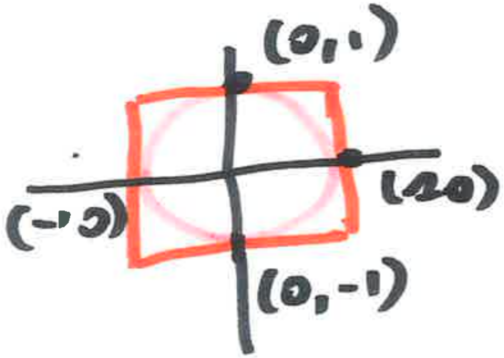
$$\|(2,5)\|_\infty = 5$$

$$\|(2,5)\|_1 = 7$$

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la sfera di centro $(0,0)$ e descritta dall'eq. $\|(x,y)\|_{\cdot} = 1$

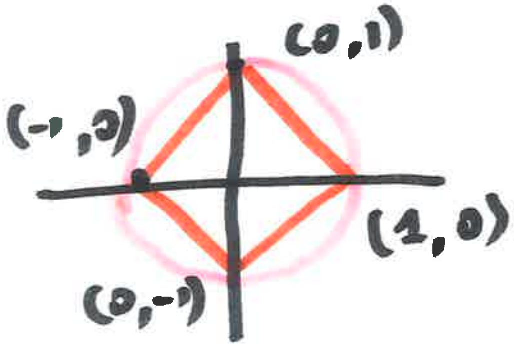


$\| \ \|_2$ $\quad (x^2+y^2)=1$

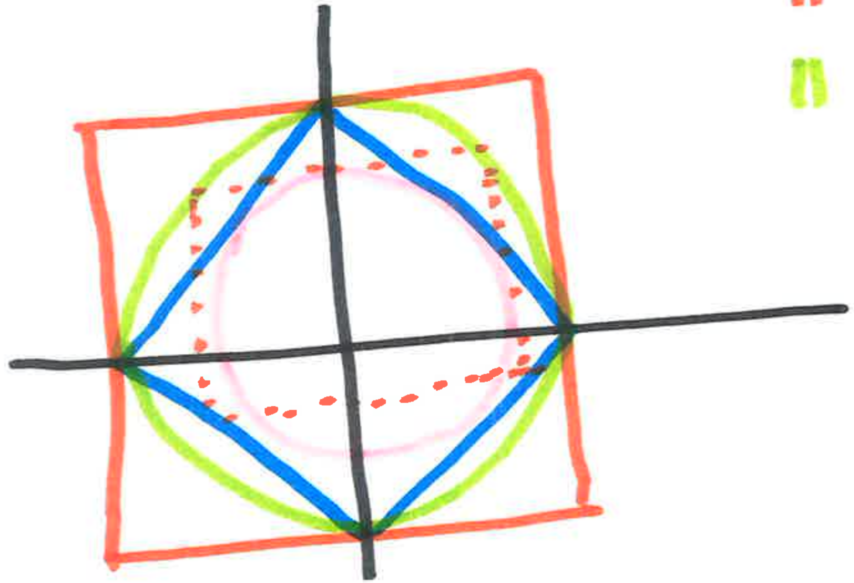


$\| \ \|_\infty$ $\quad \sup(|x|,|y|) = 1$

$x = \pm 1$ o $y = \pm 1$



$|x|+|y|=1$



$\| \; \|_1$

$\| \; \|_\infty$

$\| \; \|_2$ euclidea

In particolare se abbiamo prod. scalare definito positivo $\Rightarrow$ ABBIAMO UNA NORMA

in generale data una norma non è detto che $\exists$ un qualche prod. scalare che la induce.

Teoremi (disuguaglianze).

- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Sia $\bullet : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prod. scalare euclideo (definito positivo).

Allora $|\bar{v} \bullet \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|$. $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$

- Disuguaglianza triangolare.

Sia $\bullet : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prod. scalare euclideo

Allora $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$.

DIM (C/S).

<u>OSS 1:</u> Se $\bar{v} = \underline{0}$ o $\bar{w} = \underline{0} \Rightarrow$

$$|\underline{0} \cdot \bar{w}| = 0 \leq \|\underline{0}\| \cdot \|\bar{w}\| = 0$$

Supponiamo $\bar{v}, \bar{w} \neq \underline{0}$ e consideriamo il vettore

$$\bar{v} + \alpha \bar{w} \in V_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

calcoliamo $\|\bar{v} + \alpha \bar{w}\|^2$, cioè:

$$(\bar{v} + \alpha \bar{w}) \cdot (\bar{v} + \alpha \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{v} + 2\alpha\, \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{w}\, \alpha^2 \geq 0$$

che deve essere ≥ 0 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

In particolare ~~l'equazione $\alpha^2(\bar{w} \cdot \bar{w})$ + ...~~

La funzione

$$x^2(\bar{w}\cdot\bar{w})+2x(\bar{v}\cdot\bar{w})+\bar{v}\cdot\bar{v}$$

NON DEVE MAI CAMBIARE DI SEGNO.

$\Rightarrow$ in particolare l'equazione

$$x^2(\bar{w}\cdot\bar{w})+2(\bar{v}\cdot\bar{w})+\bar{v}\cdot\bar{v}=0$$

non deve avere 2 radici reali e distinte!

$\Rightarrow$ il suo discriminante Δ deve essere ≤ 0.

$$\frac{\Delta}{4}=(\bar{v}\cdot\bar{w})^2-(\bar{w}\cdot\bar{w})\cdot(\bar{v}\cdot\bar{v})=$$

$$=(\bar{v}\cdot\bar{w})^2-\|\bar{w}\|^2\cdot\|\bar{v}\|^2\leq 0$$

$$(\bar{v}\cdot\bar{w})^2 \leq \|\bar{w}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2$$

estraendo le radici quadrate

$$|\bar{v}\cdot\bar{w}| \leq \|\bar{w}\| \cdot \|\bar{v}\| \qquad \square$$

<u>DIM</u> DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\|\bar{u}+\bar{w}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{w}\| \iff$$

$$\iff \underbrace{\|\bar{u}+\bar{w}\|^2}_{} \leq (\|\bar{u}\| + \|\bar{w}\|)^2 =$$

$$= \|u\|^2 + \|\bar{w}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{w}\|$$

MA $(\bar{u}+\bar{w})\cdot(\bar{u}+\bar{w}) = \|\bar{u}\|^2 + 2\,\bar{u}\cdot\bar{w} + \|\bar{w}\|^2 \leq$

$$\leq \|\bar{u}\|^2 + 2|\bar{u}\cdot\bar{w}| + \|\bar{w}\|^2 \leq \quad C/S$$

$$\leq \|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 =$$

$$= (\|\bar{u}\| + \|\bar{w}\|)^2$$

DA C/S. osserviamo che $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$

$$-1 < \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} < +1$$

$\cancel{|\bar{u} \cdot \bar{v}| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$ ~~se esattamente~~

$$\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = 0 \iff \bar{u} \perp \bar{v}$$

$\cancel{|\bar{u} \cdot \bar{v}| = 1 \Rightarrow \bar{u}}$ ~~è parallelo a~~ $\cancel{\bar{v}}$

infatti

$$\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \pm 1 \iff \bar{u} \text{ è parallelo a } \bar{v}$$

se $\bar{u}$ è parallelo a $\bar{v} \Rightarrow \bar{u} = \alpha \bar{v} \not\Leftarrow$

$$\frac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|} = \frac{|\alpha\bar{v}\cdot\bar{v}|}{\|\alpha\bar{v}\|\,\|\bar{v}\|} = \frac{|\alpha|\,\|\bar{v}\|^2}{|\alpha|\,\|\bar{v}\|^2} = 1$$

In generale se $\bar{u} = \alpha\bar{v} + \bar{w}$ con $\bar{w} \perp \bar{v}$ $w \neq 0$

$\Rightarrow |\bar{u}\cdot\bar{v}| = |\alpha|\bar{v}\cdot\bar{v} = |\alpha|\,\|\bar{v}\|^2$

$$\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\| = \|\alpha\bar{v} + w\|\cdot\|\bar{v}\| =$$

$$\sqrt{\alpha^2\|v\|^2 + \underbrace{\|w\|^2}_{>0}}\;\|\bar{v}\| > |\alpha|\,\|\bar{v}\|^2$$

ne segue $\dfrac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{\|u\|\,\|\bar{v}\|} < 1$ $\square$

Dati $\bar{v}, \bar{w}$ due vettori $V_n^o(\mathbb{R})$ s. vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$

$\bar{v}, \bar{w} \neq \underline{0}$

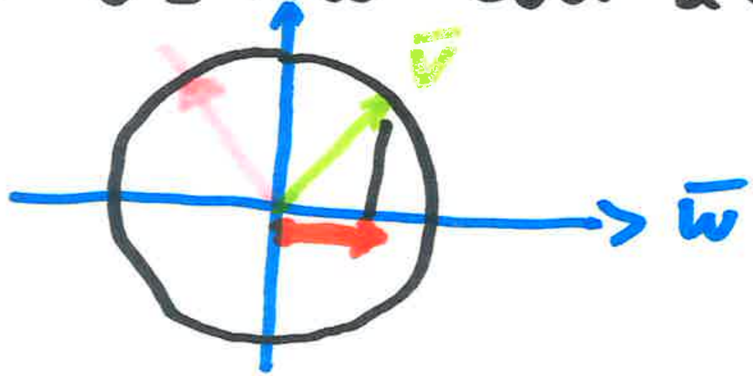
diciamo coseno dell'angolo fra $\bar{v}$ e $\bar{w}$ il numero $\boxed{\cos \vartheta := \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}}$

$\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \cos \widehat{vw} = 0$

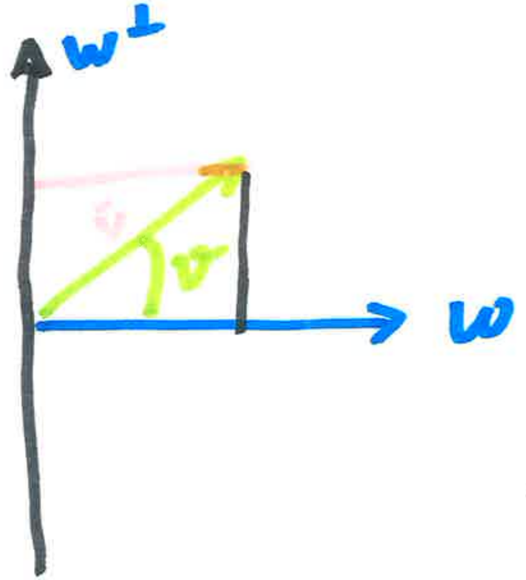
$\bar{v} // \bar{w} \Rightarrow \cos \widehat{vw} = \pm 1$

se $\bar{v} = \alpha \bar{w}$ con $\alpha > 0 \Rightarrow \cos \widehat{vw} = 1$

se $\bar{v} = \alpha w$ con $\alpha < 0 \Rightarrow \cos \widehat{vw} = -1$



$$\cos \vartheta = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$$



$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|} = \cos \vartheta$$

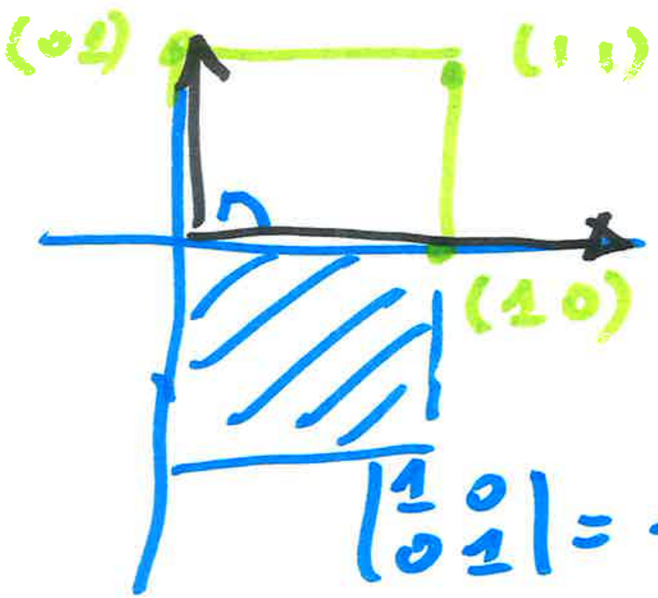
il seno dell'angolo che ci interessa é dato da

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}'}{\|\bar{v}\| \cdot \|w'\|}$$

ove $\bar{w}'$ e un vettore ortogonale a $\bar{w}$

e tale che la sua direzione sia

data in modo che mettendo a matrice le componenti di $\bar{v}$ e $\bar{w}$ rispetto una base del piano ($\mathbb{R}^2$) il det di tale matrice sia positivo.



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

<u>Esercizio</u>: Siano dati i vettori $(1,2)$ e $(1,-1)$ in $\mathbb{R}^2$.

Si determini una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ tale che i 2 vettori siano un sistema ortonormale rispetto ad essa.

oss: un prod. scalare su $\mathbb{R}^2$ è dato da una matrice simmetrica $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

3 eq. in 3 incognite a, b, c.

$$\begin{bmatrix} a+2b & b+2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \qquad a+4b+4c=1$$

$$a+b-2c=0$$

$$\begin{bmatrix} a+2b & b+2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a-b & b-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \qquad a-2b+c=1$$

$a = 1 - c + 2b$ $\qquad 1+6b+3c=1 \Rightarrow 2b+c=0$

$c = -2b$

$1+2b+2b+b+4b=0$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rightarrow \frac{5}{9} x_1 x_2 + \frac{1}{9}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{2}{9} y_1 y_2$ $\qquad b = -\frac{1}{9}$

$c = \frac{2}{9} \qquad a = \frac{5}{9}$

OSS: Sia $\bullet : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

Allora $\exists$ una base di $V_n(\mathbb{R})$ tale che $\bullet\, V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è rappresentato rispetto tale base da una matrice diagonale le cui uniche entrate sono $0, +1$ e -1.

In particolare, se $\bullet : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è un prodotto euclideo $\Rightarrow \exists$ una base rispetto cui il prod. è rappresentato dalla matrice identica e ~~tale~~ dunque si scrive rispetto tale base come il prod. scalare standard.

Sia $\bullet : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prod. Euclideo.

Sia $\mathcal{B}$ una base di $V_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possiamo costruire con G/S una base ortonormale di $V_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}'$.

Scriviamo la matrice di $\bullet$ rispetto $\mathcal{B}'$.

$$M = ((m_{ij})).$$

poiché $m_{ij} = \bar{e}'_i \bullet \bar{e}'_j$ si ha

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow M = I$$

CONSEGUENZA NON BANALE (e che useremo).

Sia A una matrice di $GL(n, \mathbb{R})$ che rappresenta un prod. scalare Euclideo (= definito positivo). Allora $\exists\, B \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che ${}^{T}B\,A\,B = I$.

[viene dal cambiamento di base per i prod. scalari].

Supponiamo ora $*: V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non definito positivo.

1) È possibile decomporre $V_n(\mathbb{R})$ come

$$V_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Rad}(*) \oplus V^+ \oplus V^-$$

ove il prod. scalare ristretto a V^+ è definito positivo, il prod scalare ristretto a V^- è definito negativo ($\forall \bar{v} \in V^-$: $\bar{v} \cdot \bar{v} \leq 0$) e

$\forall \bar{v} \in V^+, \bar{u} \in V^-$: $\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$

$\forall \bar{v} \in Rad(*)\ \forall \bar{u} \in V^+ + V^-$: $\bar{v} \cdot \bar{u} = 0$.

Si chiama segnatura del prod scalare la terna $(\dim Rad(*), \dim V^+, \dim V^-)$.

se $\dim Rad(*) = 0$ si scrive anche come segnatura

$$\underbrace{+ + + \cdots +}_{\dim V^+} \ \underbrace{- - - - \cdots - -}_{\dim V^-}$$

<u>oss</u>: il prod. scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è euclideo.

Infatti $(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$(x_1 \dots x_n) \cdot (x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ se e solo se $x_i = 0 \ \forall i$

e la somma di quadrati è sempre ≥ 0.

<u>oss 2</u>: la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale per il prod. scalare std.

come sono fatte le matrici di cambiamento di base fra basi ortonormali.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$.

→ la matrice del prod. scalare rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice identica perché $\mathcal{B}$ è ortonormale.

→ la matrice del prod. scalare rispetto $\mathcal{B}'$ è la matrice identica, perché $\mathcal{B}'$ è ortonormale.

B matrice prod. scalare.

A matrice tale che $X = {}^tA X'$

$B' = A B \, {}^tA$

ma nel nostro caso $B = B' = I$

$$I = A\, I\, {}^{T}\!A \quad \text{cioé} \quad A\, {}^{T}\!A = I$$

in altre parole $\boxed{{}^{T}\!A = A^{-1}}$

Def: Una matrice $A \in GL(n, \mathbb{K})$ è detta <u>ortogonale</u> se ${}^{T}\!A = A^{-1}$

OSS: 1) le matrici ortogonali sono un sottogruppo di tutte le matrici invertibili.

2) le righe (colonne) di una matrice ortogonale contengono le componenti dei vettori di una base ortonormale rispetto un'altra base ortonormale $\Rightarrow$

esse sono un sistema di vettori di $\mathbb{R}^n$ ortonormale.

$$
{}^TA\,A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^TR_1 & \cdots & {}^TR_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} R_1\,{}^TR_1 & R_1\,{}^TR_2 & \cdots & R_1\,{}^TR_n \\ \vdots & & & \\ R_n\,{}^TR_1 & & \cdots & R_n\,{}^TR_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \cdots & R_1 \cdot R_n \\ \vdots & & & \\ R_n \cdot R_1 & & \cdots & R_n \cdot R_n \end{bmatrix} = I \iff
$$

$R_i \cdot R_i = 1$ e $R_i \cdot R_j = 0$ se $j \neq i$

$\Leftrightarrow$ le righe sono un sistema <u>ortonormale</u>

(idem per le colonne perché ${}^{T}A = A^{-1}$

$\Leftrightarrow {}^{T}({}^{T}A) = {}^{T}(A^{-1}) =$

$= A$).

<u>N.B.</u>: le righe (colonne) di una matrice ORTOGONALE sono un sistema ORTONORMALE!!!

${}^{T}A = A^{-1}$ ORTOGONALE.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ NON è una matrice ORTOGONALE

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ è una matrice ortogonale

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$