$$\mathcal{U} = \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid \begin{matrix} a+b+c=0 \\ b-c-d=1 \end{matrix} \}.$$

$$W_k = \mathcal{L}(k + (k+1)x^2).$$

studiare la dimensione di $\mathcal{L}(\mathcal{U}) + W_k$

$\mathcal{U}$ non è s. vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ perché

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \notin \mathcal{U}$$

$$\begin{cases} a = -b-c \\ b = c+d+1 \end{cases}$$

$$\mathcal{U} = \{ [-2c-d-1] + [c+d+1]x + cx^2 + dx^3 \mid c, d \in \mathbb{R} \}.$$

$$\begin{cases} a = -(c+d+1) - c = -2c-d-1 \\ b = c+d+1 \end{cases}$$

$c=d=0 \qquad -1+x$

$c=0, d=1 \qquad -2+2x+x^3$

$c=1, d=0 \qquad -3+x+x^2$

$$\begin{matrix} (-1 & 1 & 0 & 0) \\ (-2 & 2 & 0 & 1) \\ (-3 & 1 & 1 & 0) \end{matrix}$$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3) \qquad \dim \mathcal{L}(\mathcal{U}) = 3$

Vogliamo studiare $3 \leq \dim(\mathcal{L}(\mathcal{U})+W) \leq 4$

studiare rk della matrice che corrisponde a generatori di $\mathcal{L}(\mathcal{U})+W$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k+1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(A) \geq 3$$

$\rho(A) = 3 \iff \det(A) = 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ k & 0 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$-(k+1)+k+3(k+1)=3k+2$

$3k+2=0$ cioè $k=-\frac{2}{3} \Rightarrow \det(A)=0$

$\Rightarrow \rho(A)=3 \Rightarrow$

$\dim \mathcal{L}(\mathcal{U})+W=\dim \mathcal{L}(\mathcal{U})=3$

$\Rightarrow W \leq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ e $\dim \mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap W=1$

$3k+2 \neq 0$ cioè $k \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow \rho(A)=4$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(\mathcal{U})+W_k=4=$

$=\dim \mathcal{L}(\mathcal{U})+\dim W_k=3+1$

e quindi $\mathcal{U} \oplus W_k$ e $\dim \mathcal{U} \cap W_k=0$

$\square$

Sistemi lineari.

Def: Un sistema lineare su di un campo $\mathbb{K}$ di m equazioni in n incognite $x_1 \dots x_n$ è un insieme di m equazioni di I grado in $x_1 \dots x_n$ con coeff. in $\mathbb{K}$.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si dice soluzione di un sistema lineare $(*)$ ogni vettore $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituendo ad x_i il valore di α_i tutte le equazioni di $(*)$ sono identicamente soddisfatte.

Dato il sistema lineare (*), poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matrice dei coefficienti (MATRICE INCOMPLETA DEL SISTEMA)

vettore delle incognite

vettore dei termini noti.

Le equazioni di (*) si possono riassumere come

$$\boxed{AX = B}$$

rapp. matriciale del sistema.

Chiamo la matrice $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ matrice completa del sistema (*).

DATO $AX = B$ sistema lineare:

1) $\exists$ una soluzione del sistema?

   Sí: sistema compatibile

   No: sistema incompatibile.

2) Quante soluzioni ha un sistema lineare dato?

   0 se è incompatibile

   1 il sistema è detto equivalente ad un sistema di Cramer.

   TANTE (∞) → BISOGNA CAPIRE COME SI POSSONO OTTENERE (da quanti parametri dipendono).

3) Trovare le soluzioni di $AX = B$ e scriverle in modo da poterle determinare anche se sono ∞.

Teorema (di Rouché-Capelli).

Un sistema lineare $AX=B$ ammette soluzione ($\Rightarrow$ è compatibile) $\Leftrightarrow$ $\rho(A)=\rho(A|B)$.

<u>DIM</u>: Scriviamo la matrice A per colonne

$$A = ({}^TC_1\ {}^TC_2 \dots {}^TC_n)$$

${}^TC_1, {}^TC_2 \dots {}^TC_n$ sono vettori colonna di $\mathbb{K}^m$

$$AX = ({}^TC_1\ {}^TC_2 \dots {}^TC_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\,{}^TC_1 + x_2\,{}^TC_2 + \dots + x_n\,{}^TC_n$$

e perché il sistema lineare abbia soluzione serve

$\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n :$ $\alpha_1\,{}^TC_1 + \dots + \alpha_n\,{}^TC_n = B$

il sistema $AX=B$ ha soluzione $\Leftrightarrow$

$$B \in \mathcal{L}({}^TC_1 \dots {}^TC_n)$$

cioè B è un vettore colonna di $\mathbb{K}^m$ linearm. dipendente dalle colonne di A.

$$\mathcal{L}({}^TC_1 \dots {}^TC_n) = \mathcal{L}({}^TC_1 \dots {}^TC_n\, B)$$

vero

$\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\dim \mathcal{L}({}^TC_1 \dots {}^TC_n)}_{= \rho(A)} = \underbrace{\dim \mathcal{L}({}^TC_1 \dots {}^TC_n B)}_{= \rho(A|B)}.$$

Il sistema è compatibile $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$ $\square$

ALTERNATIVA

$AX=B$

Definiamo $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$

il nostro sistema lineare diventa

$$f_A(X) = B$$

cioè trovare una preimmagine di B rispetto la funzione f_A

OSSERVIAMO CHE

$$Im(f_A) = \mathcal{L}(^T C_1 \dots {}^T C_n)$$

vettori colonna di A

B ammette preimmagine $\Leftrightarrow B \in Im\, f_A$

$\Leftrightarrow B \in \mathcal{L}(^T C_1 \dots {}^T C_n)$ etc. etc.

Sia $AX = B$ un sistema lineare.
Si dice che il sistema è omogeneo se $B = \underline{0}$
cioè tutti i termini noti sono zero.

Teorema: L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare $AX = B$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ $\iff$ $B = \underline{0}$.

<u>DIM</u>: Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0}_n \notin S \Rightarrow S$ non è sottospazio vettoriale.

Se $B = \underline{0} \Rightarrow$ il sistema lineare è

$$AX = \underline{0} \qquad (*)$$

Siano X' e X'' due soluzioni di $(*)$.

Allora

$$A(\alpha X' + \beta X'') = \alpha AX' + \beta AX'' =$$
$$= \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \forall X', X'' \in S \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha X' + \beta X'' \in S$$
$$\Rightarrow S \leq \mathbb{K}^n. \qquad \square$$

Def: Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo. Allora diciamo che $AX = \underline{0}$ ha $\underline{\infty^t \text{ soluzioni}}$ se $t = \dim S$ ove S sottospazio vett. di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni del sistema.

$\infty^0 = 1$

OSS: Sia $f : V \to W$ applicazione lineare.
$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0}\} \leq V.$

<u>DIM</u>: Siano $\bar{u}, \bar{w} \in \ker f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{w}) = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in \ker f.$$

$\square$

Teorema di prima: Le soluzioni di

$$AX = \underline{0}$$

sono gli stessi vettori di $\ker f_A$

ovvero $f_A : X \to AX$ $\quad \ker f_A = \{X \mid AX = \underline{0}\}$.

per brevità indichiamo questo insieme anche come $\ker(A) \leq \mathbb{K}^n$.

Teorema: Sia $AX = B$ un sistema lineare.

Allora ogni soluzione di $AX = B$ si scrive come la somma di una fissata soluzione particolare X_0 del sistema ed un generico elemento $Z \in \ker(A)$, ovvero una soluzione Z del sistema omogeneo $AX = \underline{0}$ associato ad $AX = B$.

<u>DIM</u>: Sia X_0 una soluzione di $AX = B$ e Z una soluzione di $AX = \underline{0}$.

$\Rightarrow A(X_0 + Z) = AX_0 + AZ = B + \underline{0} = B$.

$\Rightarrow X_0 + Z$ soluzione di $AX = B$.

Viceversa: Sia X_1 una qualsiasi sol. di $AX = B \Rightarrow$ $A(X_1 - X_0) = AX_1 - AX_0 = B - B = \underline{0}$

$Z = X_1 - X_0 \in \ker(A)$, e $X_1 = X_0 + Z$

$\square$

In generale scriveremo le soluzioni di un sistema $AX=B$ non omogeneo come

$$X_0 + \mathrm{Ker}(A) := \{X_0 + Z \mid Z \in \mathrm{Ker}\, A\}.$$

e osserviamo che X_0 é un vettore

$\mathrm{Ker}(A)$ è un sott. vettoriale che avrà una base formata da t vettori. (oppure $\mathrm{Ker}(A)=\{0\}$).

→ possiamo descrivere ∀ le infinite (potenzialmente) soluzioni del sistema dando solo $(t+1)$ vettori.

$t = \dim \mathrm{Ker}(A)$.

Def: Si dice che un sistema lineare

$$AX = B$$

ha $\underline{\infty^t \text{ soluzioni}}$ se esso è compatibile

e $t = \dim(\ker(A))$

Esempio

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y \quad =3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3-y \\ z=1 \end{cases}$$

OGNI SOLUZIONE SI SCRIVE COME SOL. PARTICOLARE

~~(3,1) + Ker(A)~~ $(3,0,1)+\ker(A)$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \ker A = \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}((1,-1,0)).$$

$S = (3\ 0\ 1) + \mathcal{L}((1,-1,0))$

In particolare ci sono ∞^1 soluzioni.

[oss: $t = k$ dim $\ker(A) = \mathrm{null}(A)$
è il numero di parametri da cui dipendono
le soluzioni.]

come si trova t?

<u>Teorema</u>: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.
Allora $rk(A) + \mathrm{null}(A) = n$

CONSEGUENZA: Un sistema lineare compatibile $AX = B$ ha ∞^{n-k} soluzioni ove $n = \#$ incognite

$k = rk(A) = rk(A|B)$.

DIM: poniamo $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$

vogliamo far vedere che

$$\underbrace{\dim Im(f_A)}_{rk(A)} + \underbrace{\dim Ker f(A)}_{null(A)} = n$$

$Ker(f_A) \leq \mathbb{K}^n \Rightarrow \exists \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ base di $Ker(f_A)$ a meno che non sia $Ker(f_A) = \{\underline{0}\}$.

- Se $Ker(f_A) = \{\underline{0}\} \Rightarrow f_A$ è iniettiva e manda sequenze libera in sequenze libere.

in particolare

$\dim \mathrm{Im}(f_A) = n$

supponiamo $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \ldots \bar{e}_n')$ base di $\mathbb{K}^n$

e che $\exists (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \neq (0\,0 \ldots 0)$ tali che

$$\alpha_1 f(\bar{e}_1') + \ldots + \alpha_n f(\bar{e}_n') = \underline{0}$$

$\Rightarrow f(\alpha_1 \bar{e}_1' + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n') = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{e}_1' + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n' \in \mathrm{Ker}\, f_A \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{e}_1' + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n' = \underline{0}$ $\lightning$ perché $\mathcal{B}'$ è libera

e $(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \neq (0\,0 \ldots 0)$.

se $\mathrm{Ker}\, f_A = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_k) \Rightarrow$ completiamo questi k vettori

a base di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n-k$ vettori

$\bar{g}_1 \dots \bar{g}_{n-k}$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k, \bar{g}_1 \dots \bar{g}_{n-k})$ base di $\mathbb{K}^n$.

$$\operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}(\underbrace{f_A(\bar{e}_1) \dots f_A(\bar{e}_k)}_{= \underline{0}}, f_A(\bar{g}_1) \dots f_A(\bar{g}_{n-k})) =$$

$$= \mathcal{L}(f_A(\bar{g}_1) \dots f_A(\bar{g}_{n-k}))$$

MOSTRIAMO CHE $(f_A(\bar{g}_1) \dots f_A(\bar{g}_{n-k}))$

BASE DI $\operatorname{Im} f_A$ da cui segue

$\dim \operatorname{Im} f_A = n-k$.

$\exists\, \beta_1 \dots \beta_{n-k}$: $\beta_1 f(\bar{g}_1) + \dots + \beta_{n-k} f(\bar{g}_{n-k}) = \underline{0}$

con β_i non tutti $= 0$

$$\Rightarrow f(\beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{g}_{n-k}) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{g}_{n-k} \in \operatorname{Ker} f_A \ \lightning$$

perché il Ker di f_A è generato da $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K$ mentre i vettori $\bar{g}_i$ sono stati presi per completare questa seq. a base.

$\beta_1 \bar{g}_1 + \dots \beta_{n-k} \bar{g}_K \in \operatorname{Ker} f_A \Rightarrow \exists\, \gamma_1 \dots \gamma_K \in \mathbb{K}$:

$\beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{g}_K = \gamma_1 \bar{e}_1 + \dots + \gamma_K \bar{e}_K$ e quindi

portando tutto a dx si avrebbe una c. lineare a coeff. non tutti nulli di vettori di una base che dà $\underline{0}$. y.

$$\rightarrow \dim \operatorname{Im} f_A = n-k = rk(A)$$

$$\Rightarrow rk(A) + null(A) = n-k+k = n. \qquad \square$$

6.
$$\begin{cases} x+ky+2t=0 \\ y+kz+t=0 \\ x+(k+1)y+kz+(k+3)t=h-k \end{cases}$$

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+3 & h-k \end{array}\right)$$

$\rho(A)=2$

$\rho(A|B)$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 4-k \end{vmatrix} = (4-k)$$

$\rho(A|B) = 2$ se $k=4$

$= 3$ se $k \neq 4$

soluzione il sistema è compatibile solo se $k=4$ nel qual caso ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

per $k \neq 4$ il sistema non ha soluzione.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + k^2 + k - 3(k+1) \neq 0$$

$\forall k = \pm 1$.

$\rho(A) \geq 2$ sempre.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (k+1)(1-k) = (\cancel{k}\, 1 - k^2).$$

$k \neq \pm 1$: $\rho(A) \geq 3$ (e dunque $\rho(A) = 3$).

$\rho(A) = 3$ $\forall k$.

$\rho(A|B) \in \{3, 4\}$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = -k\begin{vmatrix} 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k-1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -k(-k-1) + -3(k+1) + 6(k-1) - 3(k+1)(k-1) + 6$$

se è $= 0 \Rightarrow \rho(A|b) = 3$ $\Rightarrow$ sistema compat. $\Rightarrow \infty^{3-3} = \infty^0$ $\exists!$ soluzione.

se è $\neq 0 \Rightarrow \rho(A|b) = 4 > 3$ $\Rightarrow$ sistema incompat.