Legami fra sequenze libere, basi, e matrici

Già visto che se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_m)$ sono 2 basi dello sp. vettoriale $V_n(\mathbb{K})$.

ALLORA 1) esse hanno la stessa cardinalità

[per Steinitz $n \leq m$ e $m \leq n \Rightarrow m = n$ prendendo prima $\mathcal{B}$ come libera e $\mathcal{B}'$ come di generatori e poi viceversa]

Def: Si dice dimensione di $V_n(\mathbb{K})$ il numero di vettori di una sua qualunque base.

$V_n(\mathbb{K})$

sp. vettoriale

campo

DIMENSIONE

2) ogni vettore di $V_n(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico in componenti rispetto una fissata base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})\ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

3) posto $E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$ $E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Tale che $E' = AE \Rightarrow$

a) la matrice A è invertibile $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

b) se $\bar{v} = \underbrace{(x_1 \dots x_n)}_{X} E = \underbrace{(x'_1 \dots x'_n)}_{X'} E'$

$\Rightarrow$

${}^T X = {}^T A\, {}^T X'$ cambiamento di Base

$[\, XE = X'E' = X'AE \Rightarrow {}^T X = {}^T A\, {}^T X' \,]$

N.B: 1) Sia $S = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una seq. libera
$\Rightarrow$ ogni sottosequenza di S è libera

2) Sia $\mathcal{G} = (g_1 \dots g_k)$ una seq. di generatori
$\Rightarrow$ ogni sovrasequenza di $\mathcal{G}$ è di generatori

Togliere vettori ad una seq. libera $\longrightarrow$ seq. libera

AGGIUNGERE VETTORI AD UNA SEQ LIBERA $\longleftarrow$ Teorema comp. della base

Aggiungere vettori ad una seq. di generatori $\longrightarrow$ seq. di generatori

Togliere vettori ad una seq. di generatori $\longleftarrow$ Metodo degli scarti successivi

__DIM:__ 1) Sia S libero e supponiamo $S' \subseteq S$ legato

$\Rightarrow S' = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r)$ $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_r$ tali che

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r = \underline{0} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_r) \neq (0 0 \dots 0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r + 0\,\bar{e}_{r+1} + \dots + 0\,\bar{e}_n = \underline{0}$$

con $(\alpha_1 \dots \alpha_r 0 0 \dots 0) \neq \underline{0}$

$\Rightarrow S$ legato $\lightning$ ASSURDO

2) Sia $\mathcal{G} = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_k)$ di generatori.

$\mathcal{U} = (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n)$ vettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{G} \cup S$ è di generatori, perché $\forall$ vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive come

$$\beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k = \beta_1 \bar{g}_1 + \dots + \beta_k \bar{g}_k + 0\,\bar{h}_1 + \dots + 0\,\bar{h}_n$$

$\square$

7) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale con $\dim V = n$
Sia $X \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim X = n$ $\Rightarrow X = V$.

DIM: X ammette una base $\mathcal{B}'$ di n vettori $\Rightarrow$ tale base consta di n vettori di $V_n(\mathbb{K})$ liberi $\Rightarrow$ per le conseguenze di Steinitz tale seq. deve essere di generatori per $V \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}') = X \leq V_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}')$
ne segue $X = V$. □

3) La dim di $V_n(\mathbb{K})$ ci dice di quante componenti abbiamo bisogno per descrivere un vettore di $V_n(\mathbb{K})$.
Data una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$ possiamo sempre definire l'isomorfismo.

La nozione di dim ci dice "quanto è grande" uno s.vett.

1) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s.vettoriale di dim $= n$ $\Rightarrow$

$\forall i \in \{0, \dots n\}$. $\exists\, W_i \leq V$ con $\dim(W_i) = i$.

- Se $i = 0$ $\Rightarrow$ $W_0 = \{\underline{0}\}$ questo spazio non ammette base $\Rightarrow$ $\dim\{\underline{0}\} = 0$.

Se $i > 0$, Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$

poniamo $W_i = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$.

ed osserviamo che la sequenza $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ è libera (perché sottosequenza di una base e quindi s.ott. di una seq. libera) e genera W_i $\Rightarrow$ $\dim W_i = i$.

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n \longrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n). \end{cases}$$

verificate che in generale

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}) + \beta\,\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{w})$$

1) Φ è lineare.

2) Φ è biettiva perché le componenti di un vettore risp. $\mathcal{B}$ lo identificano univocamente e viceversa al ogni $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ corrisponde $\bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n$ tale che $\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

~~[Altro modo di osservare che Ker $\Phi_{\mathcal{B}} = \{0\} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}$ iniettiva~~

In particolare osserviamo che una sequenza di vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_K)$ di $V_n(\mathbb{K})$ è libera $\Leftrightarrow$ la sequenza di vettori $\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_1) \dots \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_K)$ è libera $\in \mathbb{K}^n$

Sia $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ una seq. legata di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq \underline{0}$ tali che $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \underline{0}$

applicando $\Phi_{\mathcal{B}}$

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k) = \Phi_{\mathcal{B}}(\underline{0}) = (0 0 \dots 0)$$

$$\parallel$$

$$\alpha_1 \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_1) + \alpha_2 \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_2) + \dots + \alpha_k \Phi_{\mathcal{B}}(v_k)$$

$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_1) \dots \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_k)$ legata.

viceversa: se $\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_1) \dots \Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_k)$ legata $\Rightarrow \exists (\beta_1 \dots \beta_k) \neq \underline{0}$

tali che $\beta_1 \Phi(\bar{v}_1) + \dots \beta_k \Phi(\bar{v}_k) = (0 0 \dots 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(\beta_1 \bar{v}_1 + \dots \beta_k \bar{v}_k) = \Phi(\underline{0})$

poiché Φ iniettiva segue $\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_k \bar{v}_k = \underline{0}$

con $(\beta_1 \dots \beta_k) \neq \underline{0} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ legata

$\square$

vogliamo verificare se la seguente seq. di matrici è libera o legata

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$\downarrow$

verificare se i vettori

$[1\ 0\ 0\ 1]$
$[0\ 1\ -1\ 0]$
$[1\ 0\ 0\ -1]$
$[1\ 2\ 0\ 1]$

sono liberi?

$$A = \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&2&0&1\end{bmatrix}$$

essi sono liberi $\iff$ base di $\mathbb{R}^4$

se sono base di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ la matrice è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica ad essa $\Rightarrow$ questa è di cambiamento di base $\iff$ ha $\det \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

I vettori sono liberi:

→ ABBIAMO VISTO CHE UNA MATRICE $n \times n$ CHE CONTIENE COME RIGHE UNA BASE DI $\mathbb{K}^n$ HA DET. $\neq 0$.
perché possiamo considerarla come la matrice di cambiamento di base fra la base canonica e gli n vettori linearmente indipendenti dati.

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow Rk(A) =$ nr. righe di A è linearmente indipendente.

__Teorema__: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ le righe (colonne) di A sono una base di $\mathbb{K}^n$ (ovvero sono l. indip.).

__DIM__: $\Rightarrow R(A)$ libera $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

(vista poco fa).

dobbiamo far vedere che $\det(A) \neq 0 \Rightarrow R(A)$ libera.

ovvero che $\boxed{R(A) \text{ legata} \Rightarrow \det(A) = 0}$

Proprietà dei determinanti

I teorema di Laplace

$$\det((a_{11})) = a_{11}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

proprietà

1) $\det I = \det \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = +1$

si possono riassumere come (2')

2) Se A contiene una riga di zeri $\Rightarrow \det(A) = 0$

3) Se si moltiplica una riga di A per uno scalare $\alpha \Rightarrow \det A' = \alpha \det A$.

4) Sia A la matrice che ha come righe

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

(2') $$\det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha R_i + \beta R'_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \alpha \det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \beta \det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R'_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

(3') = (5) $\det A = 0$ se in A ci sono 2 righe uguali

Le proprietà 1, 2' e 3' definiscono univocamente la funzione determinante.

$\exists !$ funzione $\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ che le soddisfi:

osserviamo che se $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è una sequenza legata di $\mathbb{K}^n \Rightarrow$ uno di essi, supponiamo $\bar{v}_1$ è c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$

$$\bar{v}_1 = \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

consideriamo $\det \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{v}_1 - \alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_n \bar{v}_n \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$

infatti è uguale a

$$\det \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} \underbrace{- \alpha_2 \det \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} - \dots - \alpha_n \det \begin{pmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}}_{\text{TUTTI QUESTI SONO } = 0}$$

d'altro canto $\bar{v}_1 - \alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_n \bar{v}_n = (0\,0 \dots 0)$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \dots 0 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \square$$

- Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dim $= n$ e siano $\underline{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n}$ suoi vettori. n vettori.

per testare se $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è libera

1) fissiamo una base di $V_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{B}$ (di solito base canonica)
2) scriviamo i vettori in componenti rispetto a $\mathcal{B}$, ottenendo una matrice

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

3) calcoliamo $\det(A)$.

se $\det(A) = 0 \Rightarrow$ LEGATA

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ LIBERA.

- che fare se abbiamo meno di n vettori in $\mathbb{K}^n$

In $V_n(\mathbb{K})$ abbiamo una sequenza $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ di vettori con $k < n$ e vogliamo sapere se è libera.

1) fissiamo una base $\mathcal{B}$
2) scriviamo i vettori $\bar{v}_i$ in componenti rispetto a $\mathcal{B}$.
3) Mettiamo tutto a matrice

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k,n}$$

A non è quadrata. Non esiste il determinante di A!!

Teorema: i vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ sono una sequenza libera $\Leftrightarrow$ la matrice A contiene una sottomatrice M (minore) $k \times k$ con $\det(M) \neq 0$.

(si dice che A contiene un minore quadrato di $\underbrace{\text{ordine massimo}}_{\text{ordine} = \min(n,k)}$ $\underbrace{\text{non singolare}}_{\det \neq 0}$)

DIM: Se la sequenza $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ è legata $\Rightarrow$ WLOG $\bar{v}_1 = \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k \Rightarrow$ la prima riga di A è c. lineare delle rimanenti.

Visto che i minori $k \times k$ si ottengono da A cancellando $(n-k)$ colonne, vediamo che anche in ognuno di tali minori la prima riga è c. lineare delle altre ⇒ essi hanno tutti det = 0.

Viceversa: Supponiamo $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ libera ⇒ le righe di A sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{K}^n$.

In particolare possiamo completare tali righe a base di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $(n-k)$ vettori presi dalla base canonica. Mettendo tutto a matrice si ottiene una matrice A' $n \times n$ con $\det A' \neq 0$ di questa forma.

$$\begin{array}{l} k \text{ righe} \\ \\ \\ n-k \text{ righe} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & & \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kn} \\ 0 & 0 & 1 \; 0 \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} A \\ \\ \\ \text{DALLA BASE CANONICA} \\ \\ \end{array}$$

In ognuna delle righe aggiunte c'è esattamente una entrata $=1 \neq 0$; tutte le altre sono nulle.

calcoliamo $\pm \det A'$ applicando Laplace a partire dall'ultima riga.

per ogni riga che cancelliamo dobbiamo anche cancellare una colonna. $\rightarrow$ $(n-k)$ passaggi.

Alla fine si ha $\det A = \pm \det M$ con M minore $k \times k$ di A. $\square$

In $\mathbb{R}^5$ $\quad ((12000), (02100))$

liberi?

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A' = \pm \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

Esercizio: determinare se $((1\,2\,0\,1\,0\,1), (0\,1\,1\,0\,0\,0), (1\,0\,0\,1\,0\,0))$ libera o legata.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ← cerchiamo un minore 3x3 con det $\neq 0$.

$$\det\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{LIBERA.}$$

$$(1\,2\,0\,1\,0\,1) \qquad (1\,1\,0\,1\,1\,1) \qquad (0\,1\,0\,0\,-1\,0)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1&2&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&-1&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

app. 1: cercare con Gauss di costruire una riga di 0.

$\Downarrow$

mettere la matrice in forma "a scalini".

$$\begin{bmatrix} 1&2&0&1&0&1\\ 0&-1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&-1&0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&2&0&1&0&1\\ 0&-1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Legata!}$$

$$\underset{a\,b\,c}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \quad \underset{a\,b\,d}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \quad \underset{a\,b\,e}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \quad \underset{a\,b\,f}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\underset{a\,c\,d}{\begin{vmatrix} \underline{1} & 0 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots$$

$$\underset{a\,d\,e}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}} \quad \underset{a\,d\,f}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \quad \underset{a\,e\,f}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} \quad \Big|_{b\,c\,d}$$

Tutti i det dei minori 3×3 e
mostra che sono $= 0$. $\Rightarrow$

Esercizio: per quali valori di k i vettori $(1\ 2\ k)$ ~~(0 2 -k)~~ $(k\ 1\ -k)$ sono una sequenza libera?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 1 & -k \end{bmatrix} \text{ sono legati} \iff$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$1-2k=0 \qquad -k+k^2=0 \qquad -2k-k=0$

$k=\frac{1}{2} \qquad k=0,\ k=1 \qquad k=0 \Rightarrow$ **MAI LEGATA**

TUTTE E 3 vere contemp. non lo sono mai

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

legati?

Se $k \neq 1 \Rightarrow$ LIBERI

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad k+4-2-3 = k-1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

RISPOSTA $\Rightarrow$ LEGATI PER $K=1$