Matrici

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$m =$ numero di righe
$n =$ colonne.

$$A = ((a_{ij}))_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$$

Si dice che 2 matrici con lo stesso numero m di righe ed n di colonne hanno le <u>stesse dimensioni</u>
le <u>stessa forma</u>.

$(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è dotato di una struttura di spazio vettoriale.

$A = ((a_{ij}))$ $\quad$ $B = ((b_{ij}))$

$A + B := ((a_{ij} + b_{ij}))$ somma componente per componente

$\alpha \cdot A = ((\alpha \cdot a_{ij}))$ prodotto comp. per componente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

<u>N.B</u>: Due matrici si possono sommare solo se hanno la stessa forma.

Un elemento di $\mathbb{K}^{1,n}$ cioè una matrice formata da una riga e n colonne è detto <u>vettore riga</u> e lo identificheremo con un elemento di $\mathbb{K}^n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Un elemento di $\mathbb{K}^{m,1}$ cioè una matrice formata da una sola colonna e m righe è detto <u>vettore colonna</u>.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$[1,2] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2,1}$$

$\in \mathbb{K}^2$

$\in \mathbb{K}^{1,2}$

NON HA SENSO SCRIVERE

$$\cancel{[1\ 2] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.

Si dice trasposta di A (indicata sul libro con ${}^tA$; in alcuni testi A^T) la matrice ${}^tA \in \mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne di A

$$A = ((a_{ij})) \Rightarrow {}^tA = ((a_{ji}))$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

prodotto righe per colonne.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{1,n}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{n,1}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} =$$

$$= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1n} b_{n1}$$

$$\in \mathbb{K} = \mathbb{K}^{1,1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 7 = 26$$

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,s}$ due matrici tali che il numero di colonne di A é uguale al numero di righe di B

Definiamo $C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m,s}$ (tante righe quanto A e tante colonne quanto B) come la matrice $C = ((c_{ij}))$ ove c_{ij} é il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ il risultato sarà in $\mathbb{K}^{2,4}$

$\mathbb{K}^{2,3}$

$\in \mathbb{K}^{3,4}$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 3 & 1\cdot 0+2\cdot 1+0\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(*)\begin{cases} 3x+2y+5z+0\cdot t = 3 \\ 2y - t = 5 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

coeff. delle incognite

osservo che risolvere (*) é equivalente a risolvere l'equazione matriciale

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y + 5z + 0 \cdot t \\ 0x + 2y + 0z - t \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 3z + 0 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 3 \\ 2y - t = 5 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{X = B/A}$$ **NO!**

A é detta matrice incompleta del sistema

B é detto vettore dei termini noti

X è detto vettore delle incognite

OSS e proprietà del prodotto righe per colonne.

1) IL PRODOTTO DI MATRICI È ASSOCIATIVO

$$A \in \mathbb{K}^{m,n}, \quad B \in \mathbb{K}^{n,s}, \quad C \in \mathbb{K}^{s,t}$$

$$A(BC) = (AB)C$$

2) $A \in \mathbb{K}^{m,n}, \quad B, D \in \mathbb{K}^{n,s} \Rightarrow$

$$A(B+D) = AB + AD$$

similmente se $A, E \in \mathbb{K}^{m,n}, \; B \in \mathbb{K}^{n,s}$

$$(A+E)B = AB + EB.$$

3) $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ $\Rightarrow$

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

N.B. Il prodotto di matrici **NON** è COMMUTATIVO.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow t \qquad\qquad \downarrow t$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Una matrice è detta quadrata se ha lo stesso numero di righe e di colonne

$$A \in \mathbb{K}^{n,n} = Mat_n(\mathbb{K})$$

Spazio vettoriale di tutte le
<u>matrici di ordine n</u>
(cioè quadrate $n \times n$)

$(\mathbb{K}^{n,n}, +, \cdot)$ sono definiti entrambi la somma ed il prodotto di matrici.

In particolare il prodotto $\cdot : \mathbb{K}^{n,n} \times \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$
è una operazione interna.
→ è associativo.

esiste l'elemento neutro per il prodotto.

$I_n \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice identica

$I = ((a_{ij})) \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

diagonale principale

$B = ((b_{ij}))$ $\quad I = ((\delta_{ij}))$ ove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow BI = ((\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\delta_{kj})) =$

$= ((b_{ij})) = B$

sempre $= 0$ tranne che per $k=j$ in cui vale 1

$IB = B$

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta invertibile se $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che

$$AB = BA = I_n.$$

Le matrici invertibili formano un gruppo rispetto il prodotto righe per colonne.
Tale gruppo è detto <u>gruppo generale lineare</u> e si indica con $GL_n(\mathbb{K})$.

Supponiamo di avere $AX = B$ sistema lineare con $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$\to$ n equazioni in n incognite ed A invertibile.

Sia A^{-1} l'inversa di A in questo caso

$$\Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\parallel$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione se e solamente se $ad - bc \neq 0$

[illegible] $a, b, c, d \neq 0$

$$y = -\frac{b}{a} t$$

$$x = -\frac{d}{c} z$$

$$\begin{cases} a\left(-\frac{d}{c}\right) z + b z = 1 \\ c\left(-\frac{b}{a}\right) t + d t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-ad + bc) z = c \\ (-bc + ad) t = a \end{cases}$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{1,1}$.

Definiamo $|A| = \det(A) = a_{11}$

determinante di A.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Chiamiamo A_{ij} la sottomatrice di A (minore) ottenuta cancellando la i-esima riga di A e la j-esima colonna.

$\Rightarrow A_{ij} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$

Definiamo $\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} |A_{1k}| a_{1k}$

Teorema: $\forall i \in \{1 \dots n\}$ $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} |A_{ik}| a_{ik}$

(di Laplace)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(1\cdot 1 - 3\cdot 0) - 7(0\cdot 1 - 3\cdot 1) + 2(0\cdot 0 - 1\cdot 1)$$

$$= 1 + 21 - 2 = 20$$

per calcolare il det. di una matrice $n \times n$ dobbiamo calcolare n determinanti di matrici $(n-1)\times(n-1)$ etc. etc. $\rightarrow$ # totale $n!$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$0\cdot(-1)^{2+1}\left|\ \vdots\ \right| + 0\cdot(-1)^{2+2}\left|\ \cdots\ \right| + 1\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+1\,(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32}$$

Teorema $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é invertibile $\Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0$

Ed in tale caso "sappiamo" scrivere l'inversa.

proprietà dei determinanti:

1) $\det(I_n) = 1$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$1 \cdot 1$

2) Sia A una matrice in $\mathbb{K}^{n,n}$ ed A' la matrice ottenuta da A scambiando ~~con~~ due sue righe

$\Rightarrow (\det A) = -(\det A')$

3) Sia A'' la matrice ottenuta da A sommando ad una sua riga il multiplo di un vettore riga A.

Allora

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A''')$$

ove A''' è la matrice ottenuta da A sostituendo la riga ove si somma con R.

4) Sia α un elemento di $\mathbb{K}$ ed A^{IV} la matrice ottenuta da A moltiplicando una sua riga per α

$$\Rightarrow \quad \det(A^{IV}) = \alpha \det(A)$$

In (3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow \text{somma } [2\ 2\ 2]$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A'') = \det(A) + \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 2 \quad 2} \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A'''}$$