Spazio Vettoriale (su di un campo $\mathbb{K}$).

struttura algebrica con 2 operazioni

1) $\rightarrow$ $(V, \dot{+})$ è un gruppo abeliano con el. neutro $\underline{0}$ (vettore nullo)

$\rightarrow$ $\exists$ una operazione $\tilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ tale che

sono operazioni diverse!

2) $1 \tilde{\cdot} \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{v} \in V$ $\quad (\alpha \cdot \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} (\beta \tilde{\cdot} \bar{v})$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in V: \quad (\alpha + \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \dot{+} \beta \tilde{\cdot} \bar{v}$

5) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v}, \bar{w} \in V: \alpha \tilde{\cdot} (\bar{v} \dot{+} \bar{w}) = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \dot{+} \beta \tilde{\cdot} \bar{w}$

In pratica si indica $\tilde{\cdot}$ con $\cdot$ e $\dot{+}$ con $+$ perché è difficile fare confusione.

$z \otimes 4$.

2) é detta unitarietà.

3) é detta pseudo-associativa

4 & 5) sono dette pseudo-distributive.

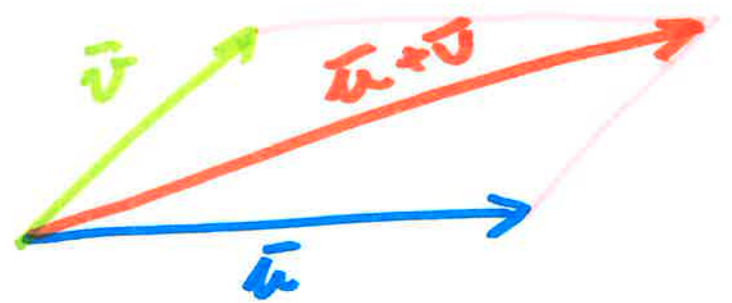
<u>Esempio 1</u>: Vettori liberi nel piano.

Vettori = freccie puntate nell'origine del piano cartesiano.

1) direzione
2) verso
3) lunghezza.

somma di vettori: legge del parallelogramma.

$+$




$\mathbb{R}$ = campo su cui si lavora.

prodotto per scalare.

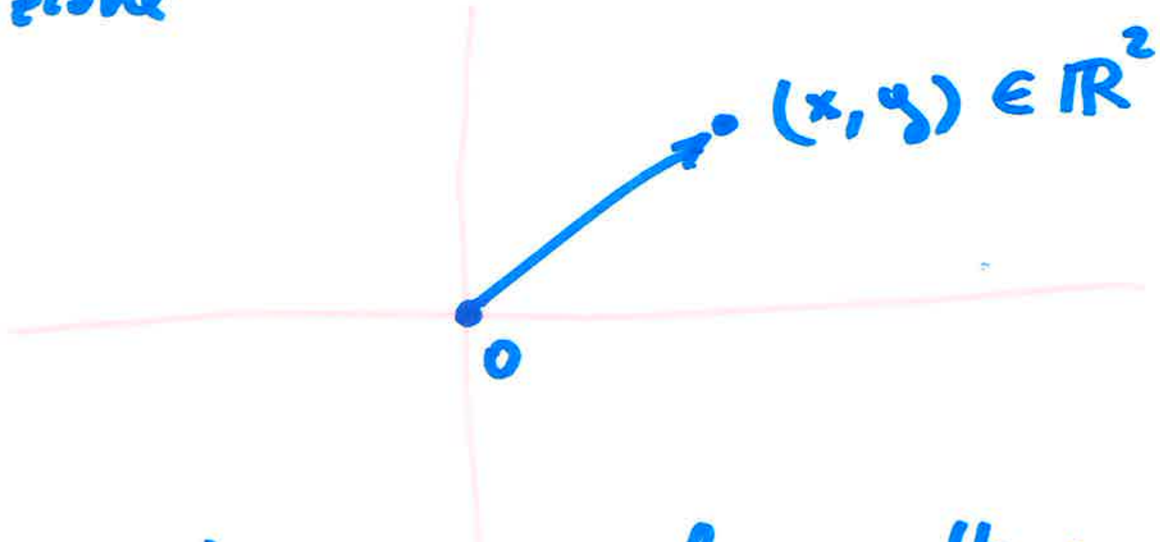
DATO UN VETTORE $\bar{v}$ ed uno SCALARE $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore

$\alpha \cdot \bar{v}$

è il vettore che ha la stessa direzione di $\bar{v}$, lunghezza $|\alpha|$ volte la lunghezza di $\bar{v}$ e stesso verso di $\bar{v}$ se $\alpha \geq 0$

verso opposto se $\alpha < 0$.

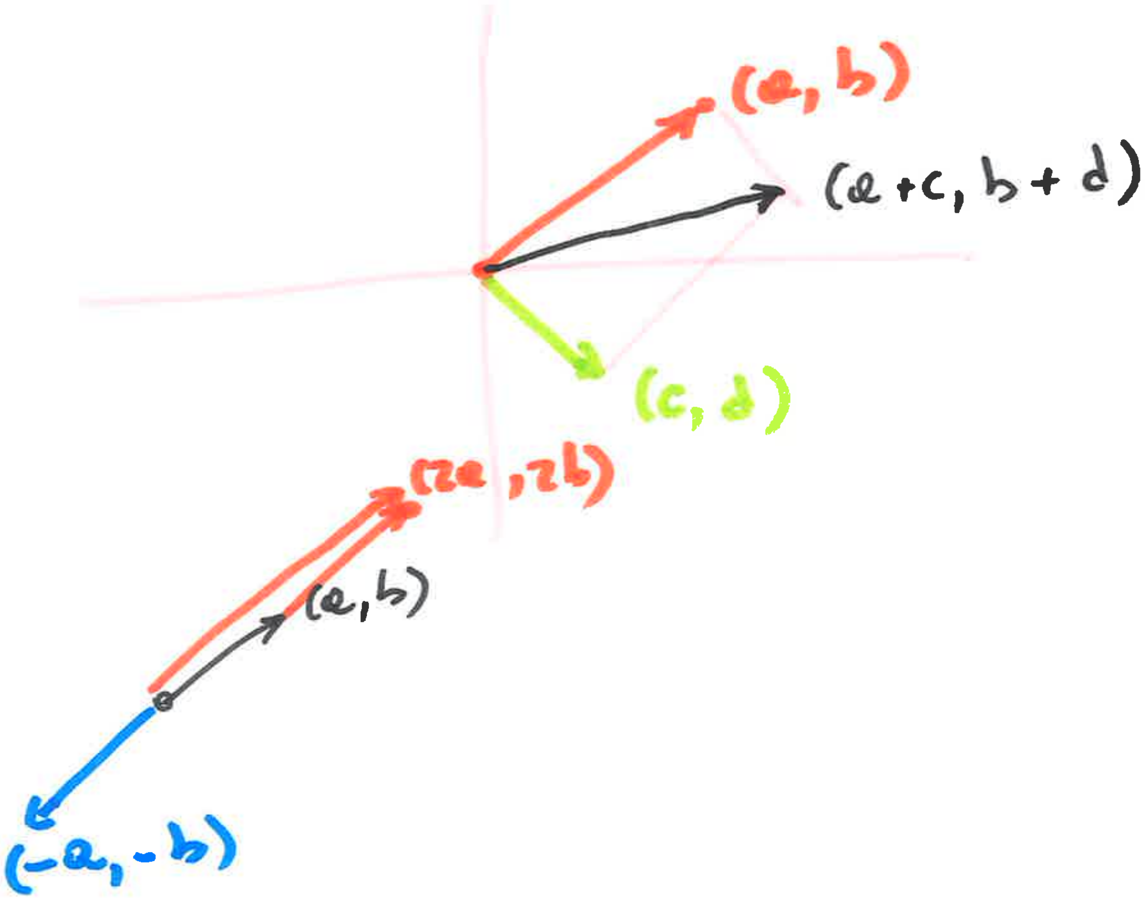
→ Identifichiamo ogni vettore dello s. vett. su $\mathbb{R}$ appena costruito con le coordinate cartesiane della sua "punta", supposto $O = (0,0)$ punto di applicazione




c'è una corrispondenza 1-1 fra i vettori visti prima e gli elementi di $\mathbb{R}^2$.

(*) Se $\bar{v} = (a, b)$, $\bar{w} = (c, d)$: $\bar{v} \dotplus \bar{w} = (a+c, b+d)$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{v} = (a, b)$ $\Rightarrow$ $\alpha \hat{\cdot} \bar{v} = (\alpha a, \alpha b)$.



Esercizio $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma componente per componente

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

e prodotto per scalare comp. per comp.

$$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$$

è uno spazio vettoriale reale.

Svolg. 1) far vedere che $(\mathbb{R}^2,+)$ é un gruppo commutativo $\rightarrow$

a) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$: $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=$
$=(a,b)=(0+a,0+b)=(0,0)+(a,b)$.

el. neutro ✓

b) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\ \exists\ (-a,-b)\in\mathbb{R}^2$: $(a,b)+(-a,-b)=$
$=(a-a,b-b)=(0,0)=$
$=(-a+a,-b+b)=(-a,-b)+(a,b)$

c) $\forall\, (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) + ((c,d)+(e,f)) =$$
$$= (a,b) + (c+e, d+f) =$$
$$= (a+(c+e), b+(d+f)) =$$
$$= ((a+c)+e, (b+d)+f) =$$
$$= (a+c, b+d) + (e,f) =$$
$$= ((a,b)+(c,d)) + (e,f) \quad \checkmark$$

D) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) =$
$$= (c+a, d+b) = (c,d)+(a,b).$$

GRUPPO ABELIANO : <u>OK</u>

<u>N.B.</u>: abbiamo usato solamente il fatto che $\mathbb{R}$ è un campo.

2) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \cdot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha\beta) \cdot (a,b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) =$$
$$= (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) =$$
$$= \alpha \cdot (\beta a, \beta b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a,b)).$$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 :$

$$(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) =$$
$$= (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b)$$
$$= \alpha \cdot (a,b) + \beta \cdot (a,b)$$

5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha\big((a,b)+(c,d)\big)=\alpha(a+c,b+d)=$$
$$=(\alpha a+\alpha c,\alpha b+\alpha d)=$$
$$=(\alpha a,\alpha b)+(\alpha c,\alpha d)=$$
$$=\alpha(a,b)+\alpha(c,d) \quad \circ$$

VALGONO TUTTE LE PROP. DI SPAZIO VETTORIALE!

1) nel dimostrare che $\mathbb{R}^2$ é spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ abbiamo usato solo le proprietà che $\mathbb{R}$ é un campo (e non abbiamo nemmeno usato la prop. commutativa del prodotto!).

In particolare se $\mathbb{K}$ é un campo al medesimo modo si dimostra che $\mathbb{K}^2$ é spazio vett. su $\mathbb{K}$.

2) Una dimostrazione analoga si può fare per far vedere che $\mathbb{K}^n$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con somma e prod. per scalare definiti componente per componente. $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

$$(x_1\ x_2\ x_3) + (y_1\ y_2\ y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

$$\alpha(x_1\ x_2\ x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

In particolare $\mathbb{K}$ è anche spazio vettoriale su se stesso.

<u>N.B.</u>: l'esempio di $\mathbb{K}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è <u>fondamentale</u>!!!

(vedremo che ogni spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ <u>di dimensione finita</u> è isomorfo ad un $\mathbb{K}^n$).

$\mathbb{K}^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$. $(\mathbb{K}^n, +)$ è spazio vettoriale

$$\mathbb{K}^{m,n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

insieme delle matrici ad entrate in $\mathbb{K}$ di dimensioni $m \times n$.

Tabelle rettangolari con $m$ righe
$n$ colonne.

Es. $\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

un elemento di $\mathbb{K}^{n,n}$ é detto matrice quadrata di ordine $n$

↓

stesso numero di righe e colonne.

Una matrice $M$ di $\mathbb{K}^{n,n}$ tale che tutte le entrate $m_{ij}$ con $i > j$ sono zero é detta triangolare superiore.

$$\cancel{M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrici in $\mathbb{K}^{m,n}$ indicate con lettere maiuscole. Le entrate sono indicate con la corrispondente lettera minuscola e due indici: quello di riga $1 \leq i \leq m$ e quello di colonna $1 \leq j \leq n$.

$$A = ((a_{ij}))_{i=1 \dots m}^{j=1 \dots n}$$

$a_{ij}$ → riga (i), → colonna (j).

Somma di matrici

$A = ((a_{ij}))$ $\qquad B = ((b_{ij}))$

$$A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = ((a_{ij} + b_{ij})) \in \mathbb{K}^{m,n}$$

$A, B \in \mathbb{K}^{2,3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

**N.B** Due matrici ~~si possono~~ su $\mathbb{K}$ si possono sommare $\Leftrightarrow$ esse hanno la stessa forma cioè lo stesso numero di righe e di colonne ovvero appartengono entrambe allo stesso $\mathbb{K}^{m,n}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = ??$$ NON SI PUÒ FARE!

Sia $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiamo

$A = ((a_{ij}))$ $\qquad \alpha A := ((\alpha a_{ij}))$

Es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

<u>oss</u>: con queste 2 operazioni $\mathbb{K}^{m,n}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}) + (b_{11}\ b_{12}\ b_{21}\ b_{22}) = (a_{11}+b_{11}\ a_{12}+b_{12}\ a_{21}+b_{21}\ a_{22}+b_{22})$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}) = (\alpha a_{11}\ \alpha a_{12}\ \alpha a_{21}\ \alpha a_{22})$$

$$\mathbb{K}^{2,2} \neq \mathbb{K}^4$$

matrici — vettori

come spazi vettoriali si comportano al medesimo modo!

ISOMORFISMO

$\exists \quad \varphi : \mathbb{K}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{K}^4$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11} \; a_{12} \; a_{21} \; a_{22})$$

Tale che
1) $\varphi$ è invertibile (biiettiva)
2) $\forall A, B \in \mathbb{K}^{2,2} \quad \varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$
$\quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \varphi(\alpha A) = \alpha\, \varphi(A)$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^{2,2} & \xrightarrow{\text{operazioni}} & \mathbb{K}^{2,2} \\
\varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\
\mathbb{K}^{4} & \xrightarrow{\text{operazioni}} & \mathbb{K}^{4}
\end{array}
$$

$$\mathbb{K}^{m,n} \cong \mathbb{K}^{m \cdot n}$$

↑ isomorfo.

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} \cdots a_{1n} \\
a_{21} \cdots a_{2n} \\
\vdots \\
a_{m1} \cdots a_{mn}
\end{pmatrix}
\to
\left( a_{11} \cdots a_{1n} \; a_{21} \cdots a_{2n} \cdots \right)
$$