Teorema dell'ordine

Sia $F(x_1 x_2 x_3)$ un polinomio omogeneo di grado n.

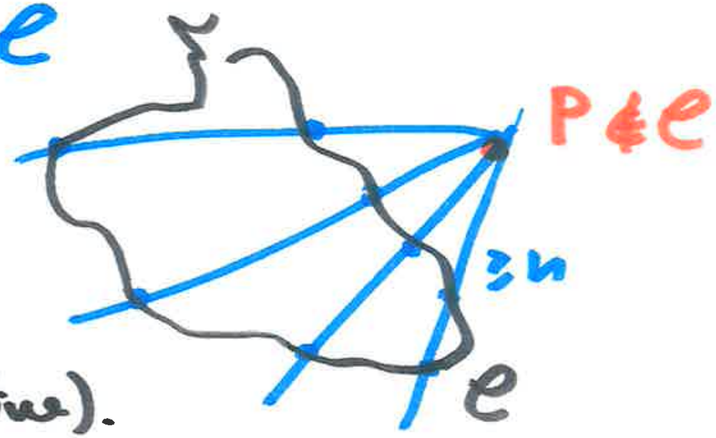
Poniamo $\mathcal{C} = V(F) = \{[(x_1 : x_2 : x_3)] \mid F(x_1 x_2 x_3) = 0\}$.

Allora per ogni retta $r \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si ha

$r \subseteq \mathcal{C}$ oppure $|r \cap \mathcal{C}| = n$.

Conseguenze: 1) $|r \cap \mathcal{C}| > n \Rightarrow r \subseteq \mathcal{C}$

2) $|\mathcal{C}| = \infty$



IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE (nel caso affine).

$\mathcal{C}: f(x,y) = 0$ eq. curva

$r: y = ax + b$

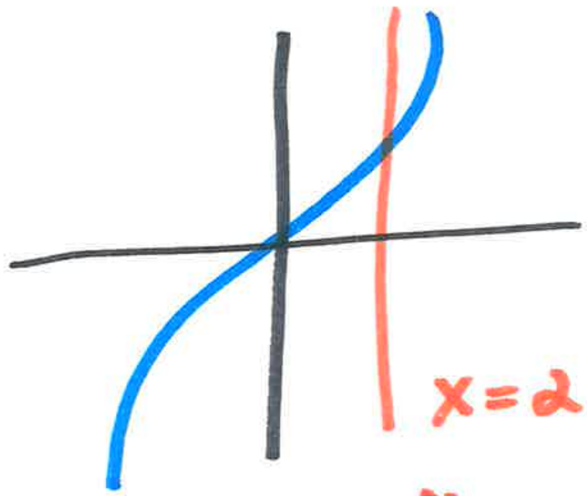
$\Rightarrow \mathcal{C} \cap r: \underbrace{f(x, ax+b)}_{g(x) \text{ polinomio in } x} = 0$

se $\deg g(x) = n$, visto che $\mathbb{C}$ è alg. chiuso $\exists$ n radici (non necessariamente distinte) per $g(x) = 0$. $\Longrightarrow$ n punti di intersezione.

può essere $g(x) \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow$ ok

può essere $\deg g(x) < n \Rightarrow$ problemi

$y = x^3$



$x = \alpha \rightarrow (\alpha, \alpha^3)$

$\exists!$ punto affine.

DIM (vera)

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$r \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_1'' \\ x_2 = \alpha x_2' + \beta x_2'' \\ x_3 = \alpha x_3' + \beta x_3'' \end{cases}$$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$[(x_1' \; x_2' \; x_3')] = P$ $\quad P \neq Q$

$[(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')] = Q$

sono 2 punti della retta distinti.

$$G(\alpha, \beta) := F(\alpha x_1' + \beta x_1'', \alpha x_2' + \beta x_2'', \alpha x_3' + \beta x_3'')$$

$G(\alpha, \beta) = 0 \iff$ il punto $[\alpha(x_1' \; x_2' \; x_3') + \beta(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')] \in r \cap \mathcal{C}$.

FATTI

1) Se $G(\alpha,\beta) \equiv 0$ $\forall \alpha, \beta \Rightarrow \tau_G \subseteq \mathcal{C}. \Rightarrow$ FINE.

2) Se $G(\alpha,\beta) \not\equiv 0 \Rightarrow G(\alpha,\beta)$ è un polinomio omogeneo di grado n.
$=$ grado di $F(x_1 x_2 x_3)$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j}$$

$$\Rightarrow G(\alpha,\beta) = \sum_{i,j} a_{ij} (\alpha x_1' + \beta x_1'')^i (\alpha x_2' + \beta x_2'')^j \cdot (\alpha x_3' + \beta x_3'')^{n-i-j}$$

si vede che i gradi dei monomi che compaiono sono sempre $i+j+(n-i-j) = n$.

$$G(\alpha,\beta) := \sum_{i=0}^{n} g_i \alpha^i \beta^{n-i}.$$

ed $\exists$ almeno un i: $g_i \neq 0$.

2 casi: A) $g_n \neq 0 \Rightarrow G(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \alpha^i \beta^{n-i} + g_n \alpha^n$

OSSERVIAMO CHE $(1,0)$ non può essere soluz. DI $G(\alpha,\beta)=0$ perché $G(1,0) = g_n \neq 0$

In particolare $\forall$ soluzione (λ,μ) deve avere $\mu \neq 0$. Quindi possiamo partire da $G(\alpha,\beta)$ e scrivere

$$H\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) := \frac{1}{\beta^n} G(\alpha,\beta)$$

e questo è un polinomio in $\zeta = \frac{\alpha}{\beta}$ di grado n ed ad ogni classe di soluzioni di $G(\alpha,\beta)=0$ corrisponde una (e una sola) sol. di ~~H~~ $H(\zeta)=0$.

D'altro canto $\deg H = n$ e siamo su $\mathbb{C}$ campo algebricamente chiuso $\Rightarrow$ ci sono n punti di intersezione fra $\mathcal{C}$ ed r a patto di contare le radici di H con la dovuta molteplicità.

• B) $g_n = g_{n-1} = \dots = g_{k+1} = 0$; $g_k \neq 0$

$$G(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{k} g_i \alpha^i \beta^{n-i} = \underbrace{\beta^{n-k}}_{\deg\, n-k} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha^i \beta^{k-i} g_i\right)}_{\deg = k}$$

OSSERVIAMO ORA CHE $[(1,0)]$ è soluzione di $G(\alpha,\beta)=0$ che compare $(n-k)$ volte.

il polinomio $\tilde{G}(\alpha, \beta) := \sum_{i=0}^{k} g_i \alpha^i \beta^{k-i}$

è un polinomio omogeneo di grado k

con $g_k \neq 0 \Rightarrow$ per le stesse considerazioni di

prima $\exists$ k punti che corrispondono a sue

soluzioni $\Rightarrow$ # totale intersezioni

$$(n-k)+k = n$$

$\square$

Def: Diciamo che una retta r interseca una curva algebrica $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ in un punto P con molteplicità t se il punto P compare come radice nell'eq. che dà l'intersezione t volte.

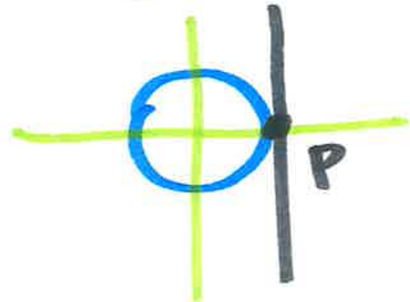
$\mathcal{C}: \; x^2+y^2-1=0$

$r_0: \; \cancel{y}\,x=1$

$1+y^2-1=0$

$\Rightarrow y^2=0$

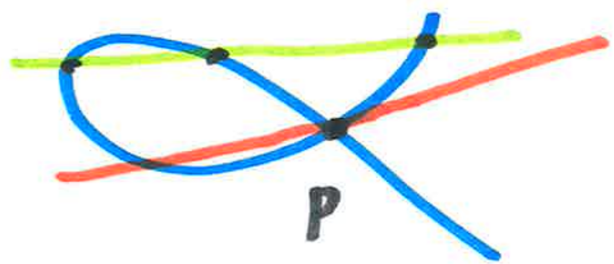
ed il punto $(1,0)$ compare dunque con molteplicità $=2$



$x=0 \;\Rightarrow\; y^2=1 \quad y=\pm 1 \quad (0,1),\ (0,-1)$

Def. Un punto $P \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ curva algebrica è detto t-uplo se ogni retta passante per t

interseca $\mathcal{C}$ in P t volte ed esistono t rette passanti per P che intersecano $\mathcal{C}$ in P $(t+1)$-volte (tutto contato con molteplicità).

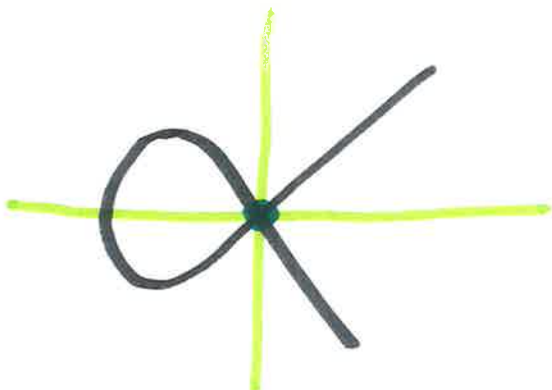


la curva blu ha sicuramente almeno ordine 3 perché la retta verde interseca in 3 punti.

$t=1 \Rightarrow$ punto semplice
$t=2 \Rightarrow$ punto doppio

$t \geq 1$: punto multiplo.

$y^2 = x^3 + x^2$



Sia r: $y = mx$ la retta per l'origine generica.

$$(mx)^2 = x^3 + x^2$$

$$x^3 + (1-m^2)x^2 = 0 \qquad x^2(x+1-m^2) = 0$$

2 soluzioni per $x=0$

<u>N.B.</u>: se $m = \pm 1 \Rightarrow$ le soluzioni per $x=0$ sono 3 perché otteniamo $x^3 = 0$

Teorema: Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ una equazione omogenea di grado n e $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$.

Allora un punto $P \in \mathcal{C}$ è multiplo

$\Leftrightarrow \quad \nabla F|_P = \underline{0} \quad$ ove

$$\nabla F|_P = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_P , \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_P , \frac{\partial F}{\partial x_3}\Big|_P \right)$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} := \sum_{i,j} i\, a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j} x_3^{n-i-j} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} := \sum_{i,j} j\, a_{ij} x^{i} x_2^{j-1} x_3^{n-i-j} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} := \sum_{i,j} (n-i-j)\, a_{ij} x_1^{i} x_2^{j} x_3^{n-i-j-1} = 0 \\ F = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^{i} x_2^{j} x_3^{n-i-j} = 0 \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

$\rightarrow$ $[(\alpha, \alpha, \beta)]$ sono tutti punti doppi $(\alpha, \beta) \neq (0\,0)$.

CURVE ALGEBRICHE DEL II ORDINE

- CONICHE

Def.: Una conica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è una curva algebrica[1] reale[2] piana[3] del II ORDINE[4].

[1] CURVA ALGEBRICA: luogo di punti che si scrive come $\tilde{V}(F)$ con $F(x_1\, x_2\, x_3)$ polinomio omogeneo e non costante ~~ed omogeneo~~ in $x_1\, x_2\, x_3$.

[2] reale: il polinomio $F(x_1\, x_2\, x_3)$ è con coeff. in $\mathbb{R}$. (in realtà significa $\tilde{V}(F) = \overline{\tilde{V}(F)}$)

[3] piana: siamo in un piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

[4] II ordine: il polinomio $F(x_1\, x_2\, x_3)$ ha grado $= 2$.

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

OSS: ci sono 6 coeff. ma equazioni proporzionali (con coeff $\neq 0$) danno la medesima curva $\Rightarrow \exists\ \infty^5$ CONICHE.

→ DATI 5 punti in "posizione opportuna" $\exists!$ conica che li contiene.

il rango della matrice la cui sol. vi dà a_{ij} è 5.

__oss__: Una circonferenza (generalizzata) è una conica che passa per i punti ciclici $[(1,i,0)]$ $[(1,-i,0)]$.

Infatti se $[(1,i,0)] \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0 \\ a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$a_{11} = a_{22} \qquad a_{12} = 0$$

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$\downarrow$ in coord. affini

$$a_{11}(x^2+y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 .$$

$$(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

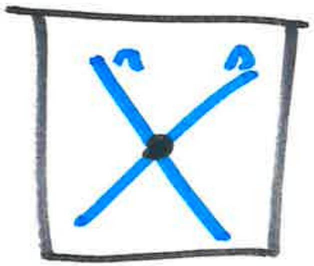
ove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

$A = {}^{T}\!A$
è detta matrice
della conica.

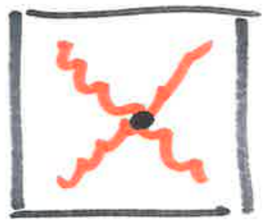
→ ASSOCIATA AD OGNI CONICA $\mathcal{C}$ esiste un prodotto scalare (= forma bilineare simmetrica) indotto dalla corrispondente matrice A.

Teorema: Una conica non ha punti tripli.
Se essa ha un punto doppio $\Rightarrow$ essa è unione di 2 rette.

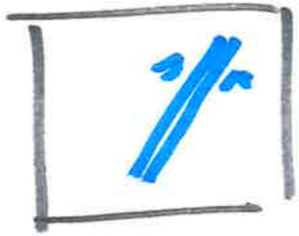
- Se $\exists!$ punto doppio le 2 rette sono reali e distinte o immaginarie e coniugate.
- Se $\exists$ almeno 2 punti doppi $\Rightarrow$ ce ne sono infiniti e la conica è una retta reale contata 2 volte.



$r \neq s$



$r \cap \bar{r}$



$r = s$

Una curva con un punto multiplo è detta ~~[illegible]~~ singolare. Una curva che è unione di curve di grado < è detta riducibile.

Una conica è singolare $\iff$ essa è riducibile.

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0\end{cases} \equiv AX = \underline{0}$$

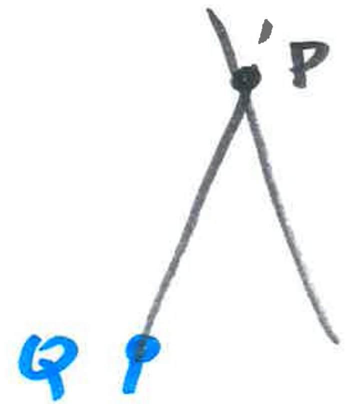
ma se $AX = \underline{0} \Rightarrow {}^{t}X A X = 0$

quindi tutte le soluzioni di $AX = 0$ sono punti di $\mathcal{C}$ e dunque sono punti doppi.

I punti doppi di $\mathcal{C}$ sono esattamente quelli contenuti in $\operatorname{Ker}(A)$.

1) $\operatorname{Ker}(A) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ NON CI SONO PUNTI DOPPI
2) $\operatorname{Ker}(A)$ ha $\dim = 1 \Rightarrow \exists!$ punto doppio
3) $\operatorname{Ker}(A)$ ha $\dim = 2 \Rightarrow \exists$ una retta di punti doppi.

MOSTRIAMO CHE SE C'È UN PUNTO DOPPIO LA CONICA SI SPEZZA.



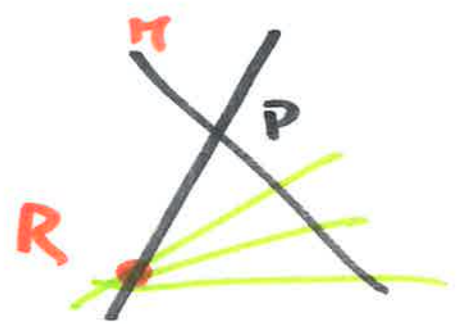
P punto doppio
$\mathcal{C}$ conica $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ curva algebrica $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ha infiniti punti
$\Rightarrow \exists\, Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\}$.

consideriamo la retta (PQ) $\Rightarrow$ essa interseca $\mathcal{C}$ in P 2 volte ed in Q almeno una volta
$\Rightarrow (PQ) \subseteq \mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ 1) $\mathcal{C}$ ha una equazione che si spezza nel prodotto di 2 equazioni di I grado, di cui una è l'eq. di (PQ).

$\Rightarrow$ A) l'equazione di (PQ) é a coeff. reali; l'equazione dell'altra retta é diversa da quella di PQ

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ é unione di 2 rette reali e distinte ed $\exists!$ punto doppio

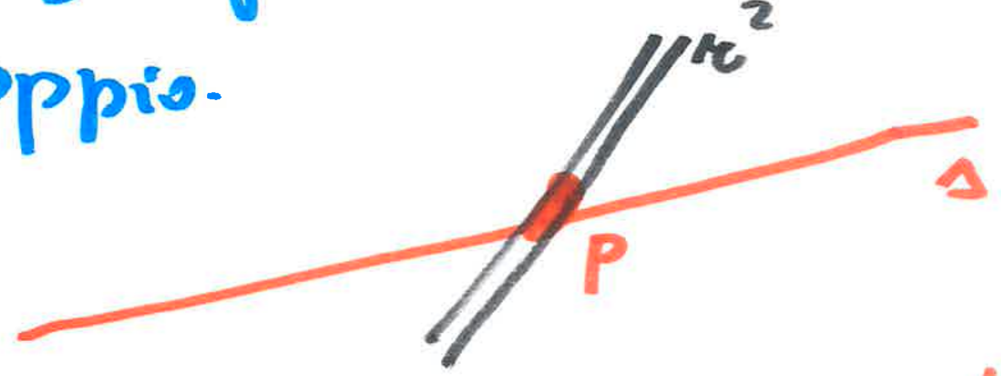


R doppio $\Rightarrow$ ogni retta per R ed un punto di r sarebbe contenuta in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ sarebbe tutto il piano ↯

B) l'eq. di (PQ) è a coeff. reali e l'eq. dell'altra retta descrive ancora (PQ) $\Rightarrow$ $F(x_1\, x_2\, x_3) = (PQ)^2$

$\rightarrow$ la conica si spezza in 2 rette reali e coincidenti: (unica retta contata 2 volte)

$\Rightarrow$ ogni punto della conica è doppio.



$r^2 \cap \Delta = \{P\}$. ma Δ deve intersecare r^2 due volte $\Rightarrow$ P è doppio.

c) l'equazione di (PQ) è a coeff. complessi e non reali.

In questo caso però:

$(PQ) \mid F = \overline{F}$ perché F reale.

$\Rightarrow \overline{(PQ)} \mid F \Rightarrow F = (PQ) \cdot \overline{(PQ)}$

e la conica si spezza in 2 rette immaginarie e coniugate.

(il punto P è l'unico punto reale ed è un punto doppio).

#

OSS: la matrice di una conica è reale e simmetrica $\Rightarrow$ DIAG. su $\mathbb{R}$

→ supponiamo la conica già riducibile.

→ A MENO DI UN CAMBIAMENTO DI BASE LA MATRICE DELLA CONICA È SIMILE A

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

se $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tutti $\Rightarrow rk(A) = 3 \Rightarrow$ CONICA GENERALE (priva di punti doppi).

se $m_a(0) = 2 \Rightarrow rk(A) = 1 \Rightarrow$ CONICA = retta contata 2 volte.

$m_a(0)=1$ $\gamma=0$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se $\alpha\beta>0$ cioè $\alpha>0$ & $\beta>0$

o

$\alpha<0$ & $\beta<0$

ALLORA la conica é eq. alla curva di equazione affine $\alpha x^2+\beta y^2=0$

con α e β dello stesso segno

$(\sqrt{|\alpha|}\,x+i\sqrt{|\beta|}\,y)(\sqrt{|\alpha|}\,x-\sqrt{|\beta|}\,y)=0$

2 rette imm. coniugate.

$$(\sqrt{|\alpha|}\,x + i\sqrt{|\beta|}\,y)(\sqrt{|\alpha|}\,x - i\sqrt{|\beta|}\,y) = 0$$

se $\alpha\beta < 0$

$$\Rightarrow \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \quad \text{corrisponde a}$$

$$|\alpha| x^2 - |\beta| y^2 = 0$$

DA CUI

$$0 = (\sqrt{|\alpha|}\,x + \sqrt{|\beta|}\,y)(\sqrt{|\alpha|}\,x - \sqrt{|\beta|}\,y)$$

CIOÈ LA CONICA SI SPEZZA IN 2 RETTE REALI E DISTINTE.

MMB