$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & 3 & 4-k \end{array}\right]$$

$$A \quad | B$$

$\rho(A) \geq 2$

III riga A = I riga + II riga

$$\rho(A) = 2$$

$$\rho(A|B) = 2 \iff \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff k = 4$$

sistema compatibile solo per $k=4$

$\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

$k=4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = -2t - 4y \\ y = -4z - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2t + 16z + 2t = 16z \\ y = -4z - t \end{cases}$$

$S = \mathcal{L}((16, -4, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$

$$(*) \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

<u>OSS</u> 1) Il sistema non è omogeneo

$\Rightarrow$ le sue soluzioni non sono un sott. vettoriale

$\Rightarrow$ l'insieme delle sue soluzioni S non ammette base.

MA

2) l'esercizio chiede una base della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(S)$ è sempre un sott. vettoriale.

$\mathcal{L}(S)$ ammette base $\iff \mathcal{L}(S) \neq \{\underline{0}\}$.

$\iff \exists\, \bar{v} \in \mathcal{L}(S)$ con $\bar{v} \neq \underline{0}$

osserviamo che il sistema dato (*)

è compatibile $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$ $\rho(A)=\rho(A|B)=2$

ed ammette una soluzione $\bar{s} \in S$ con

$\bar{s} \neq \underline{0}$ (perché non omogeneo) $\Rightarrow$

$\bar{s} \neq \underline{0}$ $\bar{s} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S)$ ammette base.

$$x = 3y$$
$$z = x + y - 3 = 4y - 3$$

$S = (0\ 0\ -3) + \mathcal{L}((3\ 1\ 4))$. $\Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}((0\,0\,-3),(3\,1\,4))$

Base $= \underline{((0\,0\,-3),(3\,1\,4))}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

Trovare i B tali che $AX = B$ ammetta ∞^2 soluzioni.

5 incognite e 3 equazioni.

per avere ∞^2 soluzioni serve $\rho(A) = 3$

ma $\rho(A) = 2$ $\Rightarrow$ tale insieme è ϕ.

perché quando $AX = B$ ha soluzione di soluzioni le sol. sono $\infty^{5-2} = \infty^3$.

Es. fosse stato, data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

determinare B tale che $AX = B$

sia compatibile.

per la dim di Rouché-Capelli:

$AX = B$ compatibile $\iff B \in \mathcal{L}(C(A))$

RISPOSTA $\quad B \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Forme bilineari e prodotti scalari.

Forma: una funzione a valori in $\mathbb{K}$

Forma lineare: funzione lineare $V(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

$$f: V \to \mathbb{K}$$

gode della proprietà

$$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}).$$

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di V

Sia (1) una base di $\mathbb{K}$ visto come s.v.ett su se stesso.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{e}_i \Rightarrow f(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(\bar{e}_i) \text{ ed in}$$

particolare noi possiamo scrivere in componenti:

$$f(\bar{v}) = \big(f(\bar{e}_1) \;\cdots\; f(\bar{e}_n) \big) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

riga delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$

colonna delle componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

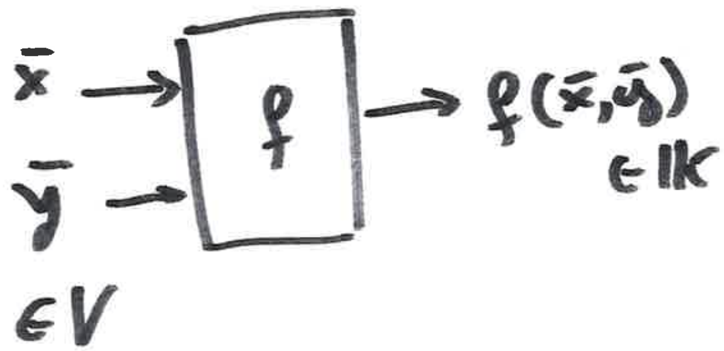
Forme <u>bi</u> lineari:

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

tali che $\forall\, \bar{b} \in V$: $\quad f_{\bar{b}}(\bar{x}) := f(\bar{x}, \bar{b}) : V \to \mathbb{K}$

$\forall\, \bar{a} \in V \quad f_{\bar{a}}(\bar{y}) := f(\bar{a}, \bar{y}) : V \to \mathbb{K}$

sono entrambe lineari.



$f: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare se

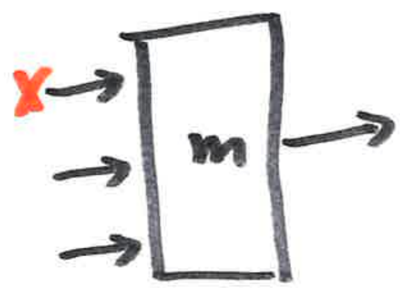
$$\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$$

$$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{z}) = \alpha f(\bar{x},\bar{z}) + \beta f(\bar{y},\bar{z})$$

$$f(\bar{x},\alpha\bar{y}+\beta\bar{z}) = \alpha f(\bar{x},\bar{y}) + \beta f(\bar{x},\bar{z}).$$

Una forma $m: \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{K}$ è detta

k-multilineare se $\forall$ componente fissata si ottiene una forma $(k-1)$-multilineare



Esempi di forme bilineari:

$$f \begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ ((a,b),(c,d)) \longrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \end{cases}$$

f è una forma bilineare.

$$f(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)) = (\alpha a + \beta a')d - (\alpha b + \beta b')c =$$
$$= \alpha(ad - bc) + \beta(a'd - b'c) =$$
$$= \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a',b'),(c,d))$$

similmente per

$$f((a,b), \alpha(c,d)+\beta(c',d')) = \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a,b),(c',d')).$$

Def: Una forma multilineare è detta alternante se ogni qual volta compare in essa un medesimo vettore 2 volte, il valore della forma è $=0$.

Bilineare alternante $\iff f(\bar{a},\bar{a}) = 0 \quad \forall \bar{a} \in V.$

N.B. Se $-1 \neq 1 \Rightarrow f$ alternante $\Rightarrow f(\bar{a},\bar{b}) = -f(\bar{b},\bar{a}) \quad \forall \bar{a},\bar{b} \in V.$

$$0 = f(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}) = \cancel{f(\bar{a},\bar{a})} + f(\bar{a},\bar{b}) + f(\bar{b},\bar{a}) + \cancel{f(\bar{b},\bar{b})} = f(\bar{a},\bar{b}) + f(\bar{b},\bar{a}).$$

$\Rightarrow f(\bar{a},\bar{b}) = -f(\bar{b},\bar{a})$.

Determinante di matrici 2x2 è una forma bilineare alternante rispetto le righe (colonne).

Il determinante di una matrice $n \times n$ è l'unica forma multilineare alternante nelle righe della matrice tale che $\det(I_n) = 1$.

Una forma bilineare $f: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta simmetrica se $\forall \bar{a},\bar{b} \in V$: $f(\bar{a},\bar{b}) = f(\bar{b},\bar{a})$.

Una forma bilineare $f: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta non degenere se $\forall \bar{a} \in V, \bar{a} \neq \bar{0}\ \exists \bar{b} \in V$: $f(\bar{a},\bar{b}) \neq 0$.

In generale l'insieme

$$Rad(f) = \{ \bar{x} \in V : \forall \bar{y} \in V : f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \}$$

è detto radicale di f ed esso è sempre un sottospazio vettoriale di V.

osserviamo che $\bar{x}, \bar{x}' \in Rad(V) \Rightarrow$

$$\forall \bar{y} \in V : f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{x}', \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Se f non degenere $\Rightarrow Rad(f) = \{\bar{0}\}$.

Descrivere le forme bilineari. $V_n(\mathbb{K})$ di dim $n < \infty$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base.

$\bar{u} = \sum u_i \bar{e}_i \quad \bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i$

$$\Rightarrow f(\bar{u}, \bar{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \bar{e}_i , \sum_{j=1}^{n} v_j \bar{e}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \cdot v_j \, f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

I valori di f dipendono solo dalle componenti di $\bar{u}$ e di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e dai valori che essa assume $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ con $i, j = 1 \dots n$.

COSTRUIAMO UNA MATRICE

$$F = \begin{bmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & \dots & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots & & \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & \dots & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

osservazione $f(\bar{u}, \bar{v}) = (u_1 \dots u_n) F \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$[u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} f(e_1, e_1) \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & \\ f(\bar{e}_n \bar{e}_1) \cdots & f(\bar{e}_n \bar{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} =$$

$$= [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) v_1 + \cdots + f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) v_n \\ \vdots \\ f(\bar{e}_n \bar{e}_1) v_1 + \cdots f(\bar{e}_n \bar{e}_n) v_n \end{bmatrix} =$$

$$= [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} v_j f(\bar{e}_1, \bar{e}_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} v_j f(\bar{e}_n, \bar{e}_j) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} v_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$$

$$= f(\bar{u}, \bar{v}).$$

In fisica si scrive

$\langle \bar{u} | = (u_1 \dots u_n)$ bra

$| \bar{v} \rangle = {}^T(v_1 \dots v_n)$ ket

$\langle \bar{u} | F | \bar{v} \rangle = f(\bar{u}, \bar{v})$.

$\langle u | \langle \bar{v} | w \rangle$

$\langle u | \langle \bar{v} |$

$\underbrace{| u \rangle \langle v |}$

oggetto che prende a sx un vettore riga e a dx un vettore colonna per dare uno scalare

→ MATRICE (di rango = 1).

$$|u\rangle\langle\bar{v}| = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & & \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RANGO = 1 se $\bar{u}, \bar{v} \neq \underline{0}$

Teorema: il rango di una matrice M corrisponde al numero minimo di matrici di rango 1 la cui somma è M.

<u>OSS</u>

1) Sia f una forma bilineare e F la matrice che la rappresenta.

ALLORA

1) f è non degenere $\Leftrightarrow$ $\det(F) \neq 0$

2) f è simmetrica $\Leftrightarrow$ $F = {}^{T}F$ (F simmetrica)

3) f è alternante $\Leftrightarrow$ $F = -{}^{T}F$ (F antisimmetrica)

1) Supponiamo $\exists \bar{x} \in V : f(\bar{x}, \bar{y}) = \underline{0}$ $\forall \bar{y} \in V$. Identifico $\bar{x}, \bar{y}$ con le loro componenti $\Rightarrow$ ${}^{t}\bar{x} F \bar{y} = 0$

$$(x_1 \dots x_n) F \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall y \in V.$$

osservo che se $(x_1 \dots x_n) F \neq (0 0 \dots 0 0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ esiste almeno una componente g_i di $(x_1 \dots x_n)F$ diversa da 0 e dunque

$$(x_1 \dots x_n) F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = g_i \neq 0$$

$\leftarrow$ posizione i

$\Rightarrow$ affinché $\bar{x} \in V$ sia tale che $\bar{x} \in Rad(f)$

deve essere ${}^T\bar{x} F = {}^T\underline{0}$

cioè $F\bar{x} = \underline{0}$ ma questo.

questo sistema ammette soluzioni $\bar{x} \neq \underline{0}$

se e solamente se non è di Cramer

$\Leftrightarrow \det(F) = 0.$

In particolare $\dim Rad(f) = n - rk(F).$

f non degenere $\Leftrightarrow \det(F) \neq 0.$

2) f simmetrica $\Rightarrow f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_j, \bar{e}_i) \; \forall i,j \Rightarrow F = {}^T F$

Viceversa: supponiamo ${}^TF = F$ ed osserviamo che

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \underbrace{{}^T\bar{x}F\bar{y}}_{\in \mathbb{K}} = {}^T({}^T\bar{x}F\bar{y}) = {}^T\bar{y}\,{}^TF\bar{x} = {}^T\bar{y}F\bar{x} = f(\bar{y},\bar{x}).$$

3) Se $f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y},\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = -f(\bar{e}_j,\bar{e}_i)$

$\Rightarrow {}^TF = -F$

viceversa: se ${}^TF = -F \Rightarrow$

$$f(\bar{x},\bar{y}) = {}^T\bar{x}F\bar{y} = -({}^T\bar{x}\,{}^TF\bar{y}) =$$

$$= -{}^T({}^T\bar{x}\,{}^TF\bar{y}) =$$

$$= -({}^T\bar{y}F\bar{x}) = -f(\bar{y},\bar{x})$$

$\square$

Def: Una forma bilineare simmetrica (non degenere) $V \times V \to \mathbb{K}$ è detta prodotto scalare.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

N.B $F = -{}^{T}F$ $\quad (-1 \neq 1)$

$\Rightarrow$ le entrate sulla diagonale principale di F devono essere tutte 0.

$$\cancel{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$F = A - {}^{T}A$ è antisimmetrica.

$F' = A + {}^{T}A$ è simmetrica
(ma in generale le entrate sulla diag. principale di una matrice simm. non sono nec $= 0$).

$$F'' = A + {}^{T}A + D \quad \text{ove} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

~~Si determini si:~~

<u>Teorema</u>: sia $n \geq 1$. l'insieme di tutte le matrici simmetriche $n \times n$ e l'insieme di tutte le matrici antisimm. $n \times n$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^{n,n}$.

calcolarne le dimensioni:

MATRICI ANTISIMMETRICHE. → quanti parametri?

$(n-1)$ I riga

$n-2$ II riga

$\vdots$

1

$$\Rightarrow \dim = (n-1)+(n-2)+\dots 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

MATRICI SIMMETRICHE

ENTRATE SOPRA DIAG PRINCIPALE $= \dfrac{n(n-1)}{2}$

\+ ENTRATE SULLA DIAGONALE $= n$

TOTALE $\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Base per matrici 3x3 antisimmetriche

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Base per matrici 3x3 simmetriche

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$