$(A, V_n(\mathbb{K}), f)$

A punti

$V_n(\mathbb{K})$ sp. vettoriale di dim $= n$

$f : A \times A \to V_n(\mathbb{K})$ $\quad P \bullet\!\!\longrightarrow Q$

$\Pi = (O, \mathcal{B})$ $\quad O \in A$ origine

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di $V_n(\mathbb{K})$

$$\Phi_\Pi : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longrightarrow (p_1 \dots p_n) \end{cases} \quad \text{ove } \overrightarrow{OP} = \sum p_i \bar{e}_i$$

Se $(p_1 \dots p_n) = \Phi_\Pi(P)$

$(q_1 \dots q_n) = \Phi_\Pi(Q)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) \bar{e}_i$

Φ_P induce un isomorfismo fra

$(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ spazio affine di partenza

$$\left(\underline{\underline{\mathbb{K}^n}}, \underline{\underline{\mathbb{K}^n}}, \delta : \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (P,Q) \to Q-P \end{cases}\right) = AG(n, \mathbb{K})$$

mediante Φ_P identifichiamo i punti con elementi di $\mathbb{K}^n$; i vettori con elementi di $\mathbb{K}^n$ e la funzione f diventa la funzione δ

cioè

$$f(P,Q) = \sum \delta(\Phi(P), \Phi(Q))_i \, \bar{e}_i$$

Sottospazi AFFINI $\equiv$ Sottospazi Lineari $\qquad [P;W] := \{P+\bar{w} \mid \bar{w} \in W\}$.

OSS 1) Sia $\Sigma = [P;W]$ un sottospazio lineare.

$\Rightarrow \forall Q \in \Sigma : \; [Q;W] = \Sigma$

DIM: Sia $R \in [Q;W] \Rightarrow R = Q + \bar{w}_1$ ma $Q \in [P;W] \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = P + \bar{w}_2 \Rightarrow R = P + (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)$

$\in [P;W]$

Il viceversa è analogo infatti

$S \in [P;W] \Rightarrow S = P + \bar{w}_1$ ma $Q \in [P;W] \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = P + \bar{w}_2 \Rightarrow S = (Q - \bar{w}_2) + \bar{w}_1 =$

$= Q + (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \in [Q;W]$

2) Siano $\Sigma = [P;W]$ e $\Theta = [Q;U]$ due sottospazi lineari. Allora o $\Sigma \cap \Theta = \emptyset$ oppure

$\Sigma \cap \Theta = [R; W \cap U]$ con $R \in \Sigma \cap \Theta$.

__DIM__: Sia $\Sigma \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, R \in \Sigma \cap \Theta$. consideriamo

$[R; W \cap U]$ e mostriamo che è contenuto

in $\Sigma \cap \Theta$.

Infatti se $S \in [R; W \cap U] \Rightarrow$

$\Rightarrow S = R + \bar{x}$ con $\bar{x} \in W \cap U$

ma $R \in \Sigma;\ \bar{x} \in W \Rightarrow R + \bar{x} \in \Sigma \Rightarrow R + \bar{x} \in$

$R \in \Theta;\ \bar{x} \in U \Rightarrow R + \bar{x} \in \Theta$

$\in \Sigma \cap \Theta. \Rightarrow [R; U \cap W] \subseteq \Theta \cap \Sigma$.

Viceversa: sia $S \in \Sigma \cap \Theta \Rightarrow S = R + \bar{x}$ con $\bar{x} \in U$

$S = R + \bar{y}$ con $\bar{y} \in W$

ma per l'unicità del vettore rispetto cui si trasla $\Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow S = R + \bar{x}$ con $\bar{x} \in U \cap W$

$\Rightarrow S \in [R; W \cap U]$

$\square$

L'intersezione di 2 sottospazi lineari è vuota oppure anch'essa un sottospazio lineare.

<u>Def</u>: Siano $P_1, P_2, \dots, P_t \in A$ dei punti.

Si dice <u>sottospazio affine generato</u> da $P_1 \dots P_t$ di $AG(n, \mathbb{K})$ il sottospazio $\langle P_1 \dots P_t \rangle = S(P_1 \dots P_t)$ più piccolo che contiene $P_1 \dots P_t$

Se $\forall i \in 1, \dots, t \quad S(\{P_1 \dots P_t\} \setminus \{P_i\}) \subsetneq S(\{P_1 \dots P_t\})$

allora si dice che i punti sono geometricamente indipendenti.

<u>OSS</u>: t punti geometricamente indipendenti generano

un sottospazio di dimensione $(t-1)$.

DIM Siano $P_1 \dots P_t$ punti dati

e sia $\Sigma = \mathcal{S}(P_1 \dots P_t) = [P_1; W]$

$\Rightarrow$ 1) $P_1 \in \Sigma$

2) $\forall i > 1 \quad P_i \in \Sigma \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_i} \in W$

poniamo ora $\Sigma = [P_1; W]$ con

$W = \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})$.

che Σ sia sottospazio affine $\Rightarrow$ ovvio.

che sia il più piccolo che contiene $P_1 \dots P_t$

segue dal fatto che $\forall$ sottospazio Σ' che contiene

tali punti i vettori $\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t}$ devono app al sott corrispondente di traslazione e quindi

$\Sigma' = [P_1; W']$

$[P_1; W] \cap [P_1; W'] =$

$= [P_2; W \cap W']$ e $\vec{P_1P_2} \dots \vec{P_1P_t} \in W \cap W'$

$\Rightarrow W \cap W' = W \Rightarrow$

$[P_1; W] \subseteq [P_1; W']$.

I punti $P_1\, P_2 \dots P_t$ sono geometricamente indip.
$\Leftrightarrow$ i vettori $(\vec{P_1P_2} \dots \vec{P_1P_t})$ sono liberi:

Infatti se $\vec{P_1P_2} \dots \vec{P_1P_t}$ sono liberi $\Rightarrow$ ogni sottosequenza di essi genera un sottospazio proprio W'' di W, ma $[P_1; W]$ è il più piccolo sottospazio affine che contiene $P_1 \dots P_t$ $\Rightarrow$ il sottospazio suddetto $W'' < W$

dà luogo ad uno spazio affine $[P_1; W'']$ che non contiene tutti i punti!

Viceversa supponiamo $P_1 \dots P_r$ geom. indipendenti

$\Rightarrow$ in particolare P_i con $1 \leq i \leq t$ non si può scrivere come $P_i = P_1 + \sum_{j \neq i} \alpha_j \overline{P}_j$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_i}$ non è c. lineare dei $\overrightarrow{P_1P_j}$ $j \neq i$

$\Rightarrow$ poiché nessuno dei vettori $\overrightarrow{P_1P_i}$ $i \neq 1$ è comb. lineare dei rimanenti la sequenza è libera. $\square$

$\dim_{Geom} [P, W] = \dim_{vett.} W =$ # di punti che servono a generare $[P; W] - 1$.

rette: Siano P, Q due punti distinti.

$\Rightarrow r = [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$ è una retta.

Viceversa: data r siano $A, B \in r$ con $r = [P; V_1]$

$A \neq B \Rightarrow [A; \mathcal{L}(\overrightarrow{AB})] \subseteq r$

in quanto $A \in r$ e $B \in r \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \underline{0} \in V_1$

$\Rightarrow V_1 = \mathcal{L}(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow [A; \mathcal{L}(AB)] = r$

$\circ$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE PER 2 PUNTI DISTINTI PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA.

<u>Teorema</u>: Sia $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine e Φ_r la sua coordinatizzazione.
Allora ogni sottospazio lineare di $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ consiste dei punti le cui coordinate

sono soluzione di un qualche sistema lineare compatibile in n incognite. Viceversa tutte le soluzioni di un sistema lineare compatibile in n incognite sono le coordinate dei punti di un sottospazio lineare di $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$.

<u>DIM</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare in n incognite compatibile.

$\Rightarrow$ le sue soluzioni si scrivono come $X_0 + Z$ con $AX_0 = B$ & $Z \in Ker(A)$.

$\Rightarrow$ consideriamo il sottospazio affine di $AG(n, \mathbb{K})$ che ha punti ~~di~~ coo. che corrispondono a $[X_0 ; Ker(A)]$

Applicando Φ_P^{-1} segue il teorema.

Sia ora $[P;W]$ un sottospazio di (A, V_n, f) passando in coordinate possiamo considerare il sottospazio $[\tilde{P};\tilde{W}]$ ove $\tilde{P} \in \mathbb{K}^n$ e $\tilde{W} \leq \mathbb{K}^n$.

$\tilde{Q}$ coordinate del punto Q appartiene a $[\tilde{P},\tilde{W}] \Leftrightarrow \overrightarrow{\tilde{P}\tilde{Q}} \in \tilde{W}$

chiamiamo $(p_1 \dots p_n) = \tilde{P}$

$(x_1 \dots x_n) = \tilde{Q}$

e siano $(a_{11} \dots a_{1n})$

$\vdots$

$(a_{k1} \dots a_{kn})$ una base di $\tilde{W}$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_1 - p_1 \quad x_2 - p_2 \ \dots \ x_n - p_n) \in \mathcal{L}\big((a_{11} \quad a_{12} \quad a_{1n}), \ \vdots \ , (a_{k1} \quad a_{k2} \ \dots \ a_{kn})\big)$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = k$$

le equazioni del sistema lineare nascono dall'imporre che tutti i minori $(k+1)\times(k+1)$ abbiano $\det = 0$.

$\square$

retta nel piano per 2 punti:

(a,b)

$$P=(x_0,y_0) \quad Q=(x_1,y_1) \rightarrow [P, \mathcal{L}(\vec{PQ})] = [(x_0,y_0), \mathcal{L}((x_1-x_0, y_1-y_0))]$$

$$\det \begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$(x-x_0)(y_1-y_0) = (y-y_0)(x_1-x_0)$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$

retta per 2 punti nel piano

in dim $=3$

$$P = (x_0 \quad y_0 \quad z_0) \qquad P \neq Q$$

$$Q = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)$$

$$r = [(x_0\ y_0\ z_0),\ \mathcal{L}((x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)).$$

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{bmatrix} = 1$$

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

$$(x - x_0)(z_1 - z_0) = (z - z_0)(x_1 - x_0)$$

$$(y - y_0)(z_1 - z_0) = (z - z_0)(y_1 - y_0)$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$ retta nello spazio.

P_i indip.

$\Sigma = \mathcal{S}(P_1, P_2 \dots P_t)$ $\qquad P_i = (p_{i1} \dots p_{in})$

le equazioni di Σ sono date dall'annullarsi del determinante di tutti i minori $t \times t$ della matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 - p_{11} & x_2 - p_{12} & \dots & x_n - p_{1n} \\ p_{21} - p_{11} & p_{22} - p_{12} & \dots & p_{2n} - p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{t1} - p_{11} & \dots & & p_{tn} - p_{1n} \end{bmatrix}$$

piano in dim = 3

$$\pi = [P; \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{w})] \qquad \bar{u}, \bar{w} \text{ indip.}$$

$$P = (x_0 \ y_0 \ z_0)$$
$$u = (u_1 \ u_2 \ u_3)$$
$$w = (w_1 \ w_2 \ w_3)$$

(1) $\Rightarrow$ eq. del piano $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$

Se $\pi = \mathcal{S}(P, Q, R)$ con P, Q, R geometricamente indipendenti cioè non allineati

$$P = (x_0 \ y_0 \ z_0)$$
$$Q = (x_1 \ y_1 \ z_1)$$
$$R = (x_2 \ y_2 \ z_2)$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$

$\square$

(1) $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_2 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

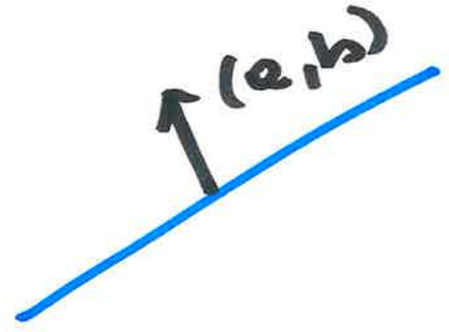
$$\parallel$$

$$(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0) \cdot [\bar{u} \wedge \bar{w}] = 0$$

$\bar{u} \wedge \bar{w}$ é un vettore che é ortogonale a tutti i vettori che congiungono 2 punti del piano.

<u>N.B</u>: Un sottospazio lineare descritto da un'unica equazione ha dimensione $n-1$ e quindi é un iperpiano. Il vettore dei coeff. di questa eq. è ortogonale rispetto il prod. scalare std ad ogni

vettore che congiunge 2 punti dell'iperpiano ed è detto direzione / vettore normale all'iperpiano



$ax+by=c$

sottospazi affini $\longrightarrow$ equazioni

equazioni $\longrightarrow$ sottospazio affine.

<u>OSS</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare omogeneo in n incognite compatibile.

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni di $AX=B$ è un sottospazio affine (in coordinate) in cui l'origine è una soluzione particolare del sistema e il sott. di traslazione è $Ker(A)$ ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$3x+2y=5$$

$$[(1,1);\mathcal{L}((-2,3))]$$

Def: Siano $\Sigma = [P; \mathcal{U}]$ e $\Theta = [Q; W]$ due sottospazi lineari. Si dice che $\Sigma // \Theta$ (Σ parallelo a Θ) se $\mathcal{U} \subseteq W$ oppure $W \subseteq \mathcal{U}$.

Se $\dim \mathcal{U} = \dim W \Rightarrow \Sigma // \Theta \Leftrightarrow \mathcal{U} = W$

oss: Se $\Sigma // \Theta \Rightarrow$ o $\Sigma \subseteq \Theta$ o $\Theta \subseteq \Sigma$ o $\Theta \cap \Sigma = \phi$

Supponiamo $\exists P \in \Sigma \cap \Theta \Rightarrow$ poiché $\Theta \cap \Sigma \neq \phi$

$\Rightarrow \Theta \cap \Sigma = [P; \mathcal{U} \cap W]$

ma $\mathcal{U} \cap W = \mathcal{U}$ oppure $\mathcal{U} \cap W = W$

nel primo caso $\Theta \cap \Sigma = [P; \mathcal{U}] = \Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma \subseteq \Theta$

nel secondo $\Theta \cap \Sigma = [P; W] = \Theta \Rightarrow \Theta \subseteq \Sigma$.

Teorema: In $AG(2, \mathbb{K})$ due rette r, s sono parallele (cioè hanno la stessa direzione) $\Leftrightarrow$ $r = s$ oppure $r \cap s = \emptyset$.

DIM: Siano $\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{matrix}$ le eq. di $\begin{matrix} r \text{ ed} \\ s. \end{matrix}$

consideriamo la matrice completa del sistema
$$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{bmatrix}$$

$r \parallel s$ significa che hanno la stessa direzione e quindi che lo spazio di trasl di r e quello s coincidono, cioè le eq. omogenee associate ad r ed ad s hanno le stesse soluzioni

$$ax + by = 0$$
é equivalente a $\Rightarrow rk\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = 1$
$$a'x + b'y = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{bmatrix} = (A|B)$$ matrice completa del sistema delle 2 rette.

$\Rightarrow rk\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = 1$ abbiamo che

o $rk(A|B) = 1 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni
$\Rightarrow r = s$.

$rk\begin{bmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow 0$ soluzioni
$r \cap s = \emptyset$.

supponiamo $r \cap s = \emptyset \Rightarrow$

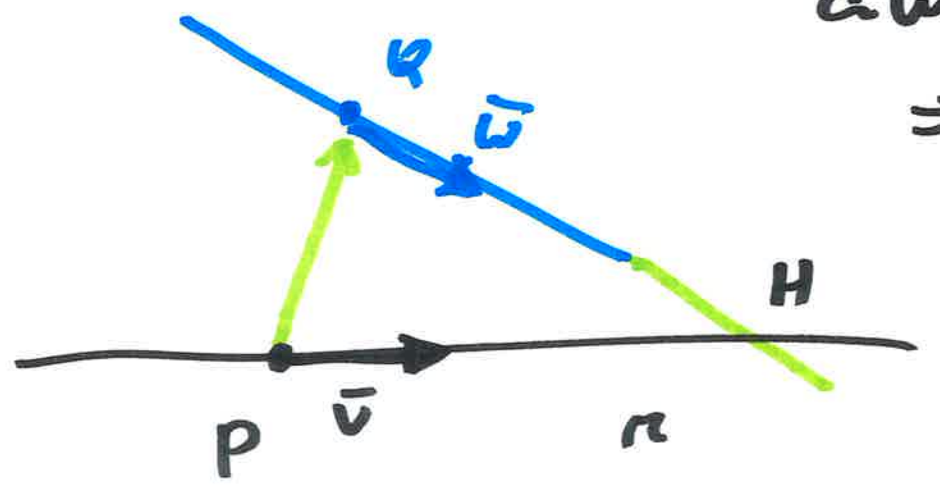
$$(A|B) = \begin{bmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{bmatrix}$$ è matrice di un sistema incompatibile.

$\Rightarrow rk(A) < rk(A|B) \Rightarrow rk(A|B) = 2$, $rk(A) = 1$

ma $rk(A) = 1 \Rightarrow$ $ax + by = 0$ e $a'x + b'y = 0$

hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow$ r ed s hanno la stessa direzione

$\square$



$$\dim AG(2, \mathbb{K}) = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}$$

$$Q + \alpha'\bar{w} = P + \beta'\bar{v}$$

$$Q + \alpha'\bar{w} = P + (\alpha\bar{v} + \beta\bar{w} + \alpha'\bar{w}) = P + \beta'\bar{v}$$

$$P + (\alpha\bar{v} + (\beta + \alpha')w) = P + \beta'\bar{v}$$

$$\beta' = \alpha \ ; \ \alpha' = -\beta$$