$$\begin{cases} x+ky+2t=0 \\ kz+y+t=0 \\ x+(k+1)y+kz+(k+3)t=\cancel{4k}\ 4-k \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+3 & \cancel{4k}\ 4-k \end{array}\right)$$

$k=0 \Rightarrow \rho(A)=2$

$\rho(A|B)=3$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & k+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+1 & k+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(k+3)-(k+1)+k-2=k$$

$k\neq 0 \rightarrow \rho(A)=3=\rho(A|B)$ sis. compat. ∞^1 soluzioni

Forme bilineari simmetriche.

Sia $f : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una funzione lineare

e sia $b : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ una ~~for~~ forma bilineare.

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di $V_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\quad \mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ BASI

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tale che ogni riga i di A contiene le componenti di $\bar{e}_i$ rispetto la base $\mathcal{B}'$

Abbiamo anche che se X rappresenta le componenti di un vettore $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ ed X' le componenti di v rispetto $\mathcal{B}'$

$${}^TX \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = {}^TX A \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{{}^TA X' = X}$$

$$\cancel{X = {}^TA^{-1} X'}$$

$$X' = {}^TA^{-1} X$$

$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$: matrice quadrata della applicazione lineare f rispetto a $\mathcal{B}$

Se y componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e

$\bar{y}$ = componenti di $f(\bar{v})$ rispetto a $\mathcal{B}$

$\Rightarrow \quad \bar{y} = F \cdot y$

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$ matrice quadrata della forma bilineare g rispetto alla base $\mathcal{B}$

X, y sono vettori di componenti di $\bar{u}, \bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$\Rightarrow \quad b(\bar{u}, \bar{v}) = {}^{T}X \cdot G y$

A cambiamento di base $\qquad X' = {}^{T}\!A^{-1} X \qquad X = {}^{T}\!A X'$

F funzione lineare $V_n \to V_n$: $\qquad y = FX$

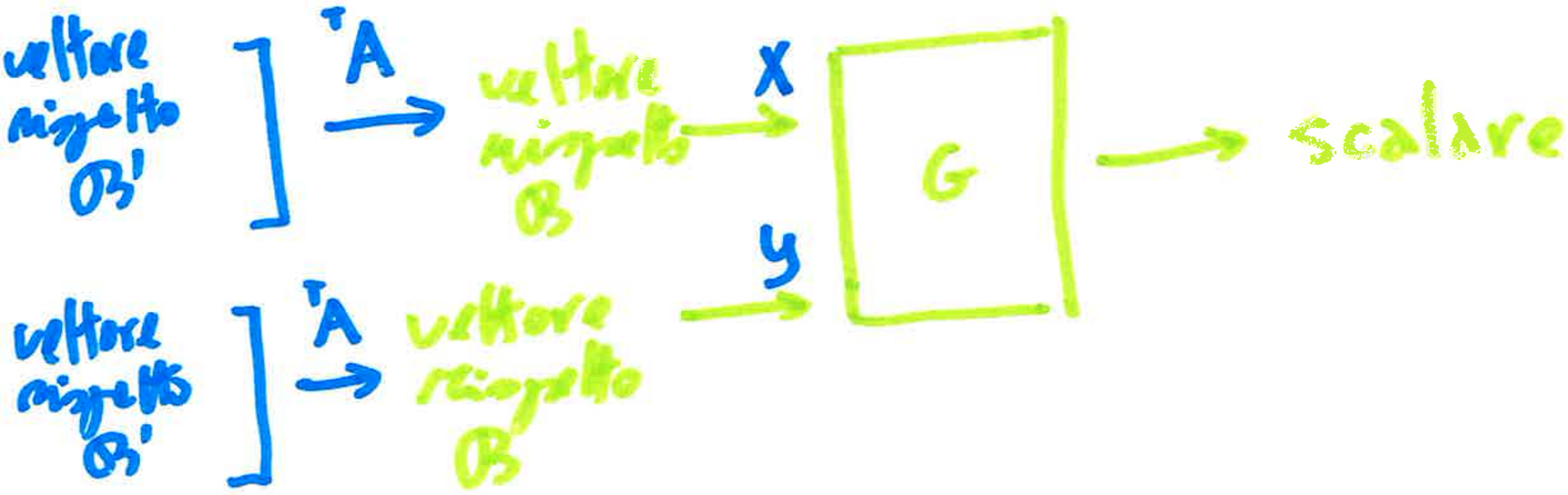
G forma bilineare $V_n \times V_n \to \mathbb{K}$: $\qquad b(x,y) = {}^{T}\!X G y.$

DOMANDA: come cambiano F e G al cambiare della base cioè come si scrivono le matrici F' e G' che danno la forma lineare e quella bilineare rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\begin{bmatrix}\text{vettore}\\ \text{rispetto}\\ \mathcal{B}'\end{bmatrix} \xrightarrow{{}^{T}\!A X'} \text{vettore rispetto a } \mathcal{B} \longrightarrow \boxed{F} \longrightarrow \text{vettore rispetto a } \mathcal{B} \xrightarrow{{}^{T}\!A^{-1} X} \begin{bmatrix}\text{vettore}\\ \text{rispetto}\\ \mathcal{B}'\end{bmatrix}$$

X'

$$F' = {}^{T}\!A^{-1} F \, {}^{T}\!A$$



$$
{}^{T}XGY = {}^{T}({}^{T}AX')\,G\,({}^{T}AY') =
$$

$$
= X'AG\,{}^{T}AY'
$$

$$
G' = AG\,{}^{T}A
$$

proprietà fondamentale $\quad \rho(G) = \rho(G')$
$\rho(F) = \rho(F')$.

il rango non dipende dalla base scelta!

Def: Sia $b : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

Si dice __rango__ di b il rango di una qualsiasi matrice G che la rappresenti.

__OSS:__ $rk(b) = n - \dim \mathrm{Ker}(G) = n - \dim \mathrm{Rad}(b)$.

Sia $V_n(\mathbb{K})$ sp. vettoriale $b : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

Indicherò $\bar{u} \cdot \bar{v} := b(\bar{u}, \bar{v})$.

Dato $\bar{v} \in V$ denotiamo come

$$\bar{v}^{\perp} = \{\bar{w} \in V_n : \bar{v} \cdot \bar{w} = 0\}.$$

"$\bar{v}$ perp"
"$\bar{v}$ ortogonale"

Se $X \subseteq V \Rightarrow X^{\perp} := \{\bar{w} : \forall \bar{v} \in X : \bar{v} \cdot \bar{w} = 0\}$

$$= \bigcap_{\bar{v} \in X} v^{\perp}.$$

$$X = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \Rightarrow \bigcap_{\bar{v} \in X} v^{\perp} = \bar{a}^{\perp} \cap \bar{b}^{\perp} \cap \bar{c}^{\perp}$$

osservazione: $X \neq \emptyset$

1) $X^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

3) $A \subseteq A^{\perp\perp}$

4) Se $Rad(b) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{L}(A) = A^{\perp\perp}$.

<u>DIM</u> 1) Siano $\bar{a}, \bar{b} \in X^{\perp} \Rightarrow \forall \bar{x} \in X: \begin{matrix} \bar{a} \cdot \bar{x} = 0 \\ \bar{b} \cdot \bar{x} = 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow (\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) \cdot \bar{x} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{x}) + \beta(\bar{b} \cdot \bar{x}) = 0 + 0 = 0$$

$$X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K}).$$

2) Se $A \subseteq B \Rightarrow \forall \bar{a} \in A,\ \bar{a} \in B$

$\Rightarrow \forall \bar{x} : \forall \bar{b} \in B\ \ \bar{x} \cdot \bar{b} = 0$ vale anche

$\forall \bar{a} \in A \Rightarrow \bar{x} \in A^{\perp}$

in particolare $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

3) $A \subseteq A^{\perp\perp} = \{ \bar{b} \in V : \forall \bar{c} \in A^{\perp} : \bar{b} \cdot \bar{c} = 0 \} =$

$= \{ \bar{b} \in V : \forall \bar{c} \in V : \forall \bar{a} \in A : \bar{a} \cdot \bar{c} = 0 \Rightarrow \bar{b} \cdot \bar{c} = 0 \}$.

In particolare se $\bar{b} = \bar{a}$ la condizione è soddisfatta $\Rightarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$.

$\square$

4) calcoliamo $\dim A^{\perp}$ nel caso in cui $\mathrm{Rad}(b) = \{0\}$

$Rad(b) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ la matrice che rappresenta b rispetto una base B ha rango n.

Sia dunque $A \subseteq V_n$.

Trovare $A^\perp$ rispetto la base B vuol dire risolvere il sistema lineare omogeneo le cui equazioni sono date da

$$\cancel{{}^T x G \bar{a}_1 = 0} \qquad {}^T x G \bar{a}_1 = 0$$
$$\cancel{{}^T G \bar{a}_2 = 0} \qquad {}^T x G \bar{a}_2 = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

~~al variare di $\bar{e}_i \in A$.~~ al variare di $\bar{a}_i \in A$

NOI SAPPIAMO CHE LE SOLUZIONI di tale sistema si possono anche ottenere da un sistema principale equivalente:

$$ {}^{T}X\, G\bar{a}_1 = 0 $$
$$ \vdots $$
$$ {}^{T}X\, G\bar{a}_K = 0 $$

ove $G\bar{a}_1 \dots G\bar{a}_K$ sono linearmente indip.

Poiché $\det(G) \neq 0$ $\quad G\bar{a}_1 \dots G\bar{a}_K$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$ $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_K$ sono indip.

$$ \Rightarrow \dim A^{\perp} = \dim V_n - rk(GM) = \dim V_n - rk(M) = $$
$$ = n - k. $$

ove $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \dots \bar{a}_k \end{bmatrix}$.

colonne.

$\dim \mathcal{L}(A) = \operatorname{rk}(\mathcal{M})$.

$\dim A^{\perp} = n - \dim \mathcal{L}(A)$.

$\dim A^{\perp\perp} = n - \dim \mathcal{L}(A^{\perp}) =$

$= n - \dim A^{\perp} = n - (n - \dim \mathcal{L}(A))$

$= \dim \mathcal{L}(A)$.

D'altro canto $A \subseteq A^{\perp\perp}$ e $A^{\perp\perp}$ é sottospazio

$\Rightarrow \mathcal{L}(A) \subseteq A^{\perp\perp}$ e $\dim \mathcal{L}(A) = \dim A^{\perp\perp}$.

$\Rightarrow$

$\mathcal{L}(A) = A^{\perp\perp}$ $\square$

N.B: Se $Rad(b) \neq \{\underline{0}\}$ allora l'inclusione potrebbe essere propria. In particolare $Rad(b) \subseteq X^{\perp}$ per ogni $X \subseteq V_n$.

→ forme bilineari simmetriche (non degeneri) e forme quadratiche

Sia $b : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica (con $+1 \neq -1$)

Si dice forma quadratica associata a b la funzione $q : \begin{cases} V_n \longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{x} \longrightarrow b(\bar{x}, \bar{x}). \end{cases}$

__N.B__ Dato b possiamo ricavare q ma vale anche il viceversa.

Sia q una forma quadratica che nasce da una forma bilineare simmetrica b

$$\Rightarrow \quad q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y}) =$$

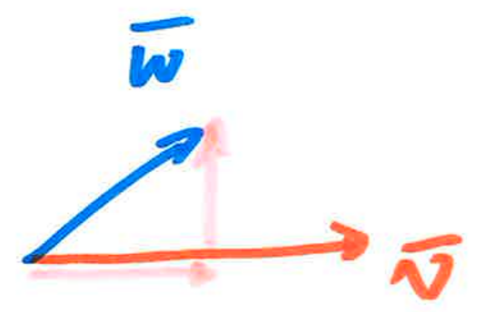
$$= b(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) - b(\bar{x},\bar{x}) - b(\bar{y},\bar{y}) =$$

$$= b(\bar{x},\bar{y}) + b(\bar{x},\bar{x}) + b(\bar{y},\bar{x}) - b(\bar{x},\bar{x}) - b(\bar{y},\bar{y})$$

$$= b(\bar{x},\bar{y}) + b(\bar{y},\bar{x}) = 2b(\bar{x},\bar{y}).$$

$$b(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}\left[q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})\right]$$

polarizzazione di q.



Teorema: Sia $\bar{v}$ un vettore tale che $b(\bar{v},\bar{v}) = q(\bar{v}) \neq 0$ (vettore anisotropo) e $\bar{w}$ un qualsiasi altro vettore. Allora

$$\bar{w} = \bar{w}_{\parallel} + \bar{w}_{\perp}$$

ove $\bar{w}_{\parallel}$ è un vettore parallelo a $\bar{v}$ e $\bar{w}_{\perp}$ è un vettore ortogonale a $\bar{v}$.

$$\bar{w}_{\parallel} := \frac{b(\bar{v},\bar{w})}{b(\bar{v},\bar{v})} \cdot \bar{v}$$

$$\bar{w}_{\perp} = \bar{w} - \bar{w}_{\parallel}.$$

DIM 1) $\bar{w} = \bar{w}_\perp + \bar{w}_{\parallel}$

2) $\bar{w}_{\parallel}$ è proporzionale a $\bar{v}$.

3) verifichiamo $b(\bar{w}_\perp, \bar{v}) = 0$

$$b(\bar{w}_\perp, \bar{v}) = b(\bar{w} - \bar{w}_{\parallel}, \bar{v}) =$$

$$= b(\bar{w}, \bar{v}) - \frac{b(v, \bar{w})}{b(\bar{v}, \bar{v})} b(v, \bar{v}) = 0 \qquad \square$$

Il numero $\dfrac{b(\bar{v}, \bar{w})}{b(\bar{v}, \bar{v})}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{w}$ su $\bar{v}$.

(lunghezza proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $\bar{w}$).

Def: Una sequenza $(\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_k)$ di vettori di $V_n(\mathbb{K})$ è detta ortonormale rispetto a b

se $\forall i,j$: $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = b(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Sia $\mathcal{B}$ una sequenza ortonormale di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{B}$ è libera.

DIM $\quad \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k = \underline{0} \quad \Rightarrow \forall i$ moltiplichiamo scalarmente per $\bar{e}_i$ a dx e sx.

$$\bar{e}_i \cdot (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_i \bar{e}_i + \dots + \alpha_k \bar{e}_k) = \bar{e}_i \cdot \underline{0} = 0$$

$$\alpha_1 (\cancel{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_1}) + \dots + \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) + \dots + \alpha_k (\cancel{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k}) = \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = \alpha_i$$

e quindi $\alpha_i = 0$ $\square$

Teorema: Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\bar{v} = \sum \alpha_i \bar{e}_i$ un vettore.

allora $\quad \alpha_i = \bar{e}_i \cdot \bar{v}$.

(è facile trovare le componenti di un vettore rispetto una base ortonormale: basta fare il prodotto scalare!).

<u>DIM</u> $\quad \bar{e}_i \cdot \bar{v} = \bar{e}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = \alpha_i$

$\square$

Esercizio: trovare le componenti del vettore $(1,2,3)$ rispetto la base di $\mathbb{R}^3$ data da $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0\,0\,1)\right)$.

OSSERVIAMO CHE LA BASE DATA È ORTONORMALE RISPETTO IL PROD. SCALARE STANDARD.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cdot(0\ 0\ 1)=0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cdot(0\ 0\ 1)=0$$

$$(0\ 0\ 1)\cdot(0\ 0\ 1)=1$$

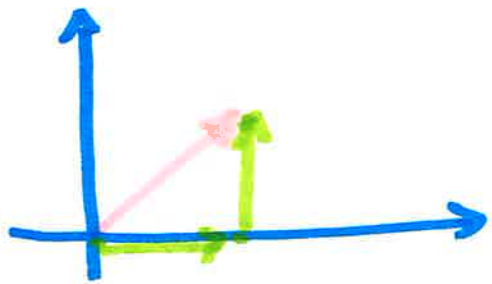
COMPONENTI DI $(1\ 2\ 3)$ rispetto $\mathcal{B}$.

$$(1\ 2\ 3)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad (1,2,3)\cdot(0\ 0\ 1)=3$$

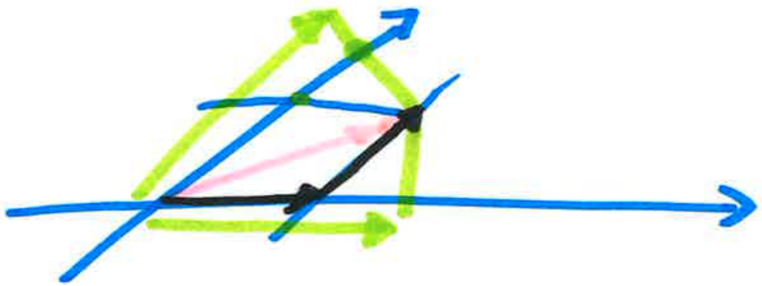
$$(1\ 2\ 3)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 3\right)$$

N.B: Se la base non è ortonormale i coeff. di Fourier non sono le componenti



rif ortogonale: ok



le proiezioni parallele e quelle ortogonali sono differenti!

Sinora $\mathbb{K}$ arbitrario.

Adesso fisso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ campo reale

Def: Un prodotto scalare $\cdot : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ è detto definito positivo se

$$\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{R}) : \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \text{ e } \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = \underline{0}$$

→ forma bilineare simmetrica non degenera tale che la forma quadratica associata è sempre ≥ 0 e $= 0$ se e solo se ~~ossia~~ $\bar{x} = \underline{0}$.

Def: Dato un prodotto scalare definito positivo diciamo

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

OSS: 1) $\|\bar{x}\| \geq 0$; 2 $\|\alpha \bar{x}\| = \sqrt{\alpha \bar{x} \cdot \alpha \bar{x}} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$

3) $\|\bar{x}\| = 0 \iff x = \underline{0}$

vedremo poi 4) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$

In generale una <u>norma</u> su $V_n(\mathbb{K})$ è una funzione che soddisfa 1 – 4 (se $V_n(\mathbb{K})$ ha una norma che è completa $\Rightarrow$ sp. di Banach)

PRODOTTO SCALARE $\Rightarrow$ NORMA $\Rightarrow$ DISTANZA

Def: Un vettore $\bar{u} \in V_n(\mathbb{R})$ con p scal definito positivo tale che $\|\bar{u}\| = 1$ è detto <u>versore</u>.

Uno spazio vettoriale reale $V_n(\mathbb{R})$ con prod. scalare definito positivo viene denotato anche come $V_n^0(\mathbb{R})$ ed è detto spazio vettoriale <u>Euclideo</u>.