UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{3,4}$ con $\dim(U) = 6$, $\dim(W) = 7$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $1 \leq \dim(U \cap W) \leq 6$; $7 \leq \dim(U + W) \leq 12$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 6 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 < 6$. ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((-1, 2, 3), (0, 1, -2), (1, 1, 2))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(2, 0, 1) \star (0, 1, 3) = 5$.
Risposta -7 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $((1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, -2, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 4 + k \\ (k + 2)x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -5$; ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.6)**
- Posto $k = -2$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{5}(0, 2, 1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1, 2$ ______ **(pt.5)**
- Posto $k = -1$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (2, 1, 1))$; no, perché la matrice A_{-1} non è simmetrica. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{2,3}$ con $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 4$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $1 \leq \dim(U \cap W) \leq 3$; $4 \leq \dim(U + W) \leq 6$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 4 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < 4$. **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((2, -1, 0), (0, 3, 1), (1, 0, 2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(-1, 2, 0) \star (3, 0, 1) = 1$.
Risposta 3 **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$ di $Mat_2(\mathbb{R})$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 4 + k \\ (k+1)x - y + 3z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -2$; ∞^1 soluzioni. **(pt.6)**
- Posto $k = -1$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{10}}{10}(0, 3, 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2, 3$ **(pt.5)**
- Posto $k = -1$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (-2, 1, 0), (1, -2, 6))$; no, perché la matrice A_{-1} non è simmetrica. **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{5,4}$ con $\dim(U) = 15$, $\dim(W) = 7$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $2 \leq \dim(U \cap W) \leq 7$; $15 \leq \dim(U + W) \leq 20$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 7 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^5) = 5 < 7$. ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((3, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 2))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(3, 1, 0) \star (1, 0, 2) = 3$.
Risposta -6 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $((1, 2, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (1, 4, 2, 0, 0))$ di $\mathbb{R}^5$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 4 + k \\ (k - 2)x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq 1$; ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.6)**
- Posto $k = 2$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{5}(0, 2, 1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1, 4$ ______ **(pt.5)**
- Posto $k = -1$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 5, -10))$; no, perché la matrice A_{-1} non è simmetrica. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^9$ con $\dim(U) = 4$, $\dim(W) = 4$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $0 \leq \dim(U \cap W) \leq 4$; $4 \leq \dim(U + W) \leq 8$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^{2,3}(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 7 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^{2,3}) = 6 < 7$. **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((-2, 1, 4), (1, -1, 0), (0, 3, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(3, 2, -1) \star (2, 1, 0) = 3$.
Risposta -1 **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $((2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, -2, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} x + y - 4z = 2 + k \\ (k + 3)x - y + 4z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -4$; ∞^1 soluzioni. **(pt.6)**
- Posto $k = -3$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{17}}{17}(0, 4, 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -2, 1$ **(pt.5)**
- Posto $k = 2$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (-4, -3, 1))$; no, perché la matrice A_2 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{3,5}$ con $\dim(U) = 9$, $\dim(W) = 8$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $2 \leq \dim(U \cap W) \leq 8$; $9 \leq \dim(U + W) \leq 15$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^7(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 8 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^7) = 7 < 8$. **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((0, 2, -1), (3, 0, 1), (-2, 1, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(0, 2, -1) \star (3, 0, 1) = -10$.
Risposta -2 **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $((2, 1, 4, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata. **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} kx + y - 2z = k - 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -2$; ∞^1 soluzioni. **(pt.6)**
- Posto $k = 2$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{5}(0, 2, 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1, 3$ **(pt.5)**
- Posto $k = 0$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 2, 12))$; no, perché la matrice A_0 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{2,3}$ con $\dim(U) = 5$, $\dim(W) = 2$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.
Risposta $1 \leq \dim(U \cap W) \leq 2$; $5 \leq \dim(U + W) \leq 6$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 3 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta
Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < 3$. **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ sia la matrice di cambiamento di base da B a B'.
Risposta $B' = ((-1, 0, 1), (2, 1, 1), (3, -2, 2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(5, -1, 0) \star (0, 3, -2) = 1$.
Risposta 12 **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Completare, se possiblile la sequenza $\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ di $M_2(\mathbb{R})$ a base. Giustificare la risposta.
Risposta $\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 4 + k \\ x - y + (k-2)z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; ∞^1 soluzioni. **(pt.6)**
- Posto $k = 2$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.
  Risposta $B = ((0, 0, 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -4, 2$ **(pt.5)**
- Posto $k = 1$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k. La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.
  Risposta $B = ((1, 0, 0), (2, 5, 0), (1, 3, 3))$; no, perché la matrice A_1 non è simmetrica. **(pt.3)**