UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o Appello - 05/02/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 1 \\ x + y = k^2 \end{cases}$$

risulta compatibile e, nei casi in cui è compatibile, se ne determino le soluzioni.

Risposta $k = \pm 1$, $S_{-1} = \{(1, 0)\}$, $S_1 = \{(1 - t, t)/t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k = 1$, si dica, motivando la risposta, se la matrice completa del sistema è ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta Si **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, si considerino i seguenti sottospazi: $U = \mathcal{L}((1, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$, $W = \mathcal{L}((2, -1, 0, 1), (0, 2, 0, 0))$.

- Si dica, giustificando la risposta, se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta No **(pt.1)**

- Si determini la dimensione e una base di $U^\perp + W^\perp$, somma dei complementi ortogonali di U e W.

Risposta $B = ((0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ sia fissato il riferimento $RA = [O, B] = (1, -2, 3), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)$. Si determinino le componenti in B del vettore $\overrightarrow{QP}$ ove $P = (1, 0, 3)$ e $Q = (-1, 1, 2)$.

Risposta $(2, -1, 1)$ **(pt.2)**

In $E_3(\mathbb{C})$, fissato un riferimento RC, si determini una base dello spazio di traslazione del piano α ortogonale alla retta $r : x = y = z$, passante per il punto $H = (-1, 0, 3)$.

Risposta $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + xy + \alpha x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (1, 1)$

  Risposta $\alpha = \beta = -3$ **(pt.2)**

- il punto $P = (1, 1)$ e la retta $p : x + y + 2/3 = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = \beta = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere tangenti ai piani $\alpha : z = 1$, $\beta : 4x - 3y = 0$ e aventi centro appartenente alla retta $r : 2x = 2z = -y$.

Risposta $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$, $(x - 1/3)^2 + (y + 2/3)^2 + (z - 1/3)^2 = 4/9$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia assegnato il punto $H : [(0, 1, -1, 0)]$ e la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 1 = 0 = z - 4$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ luogo delle rette che proiettano da H la conica $\mathcal{C}$. Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro parabolico $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2xz + 12x - 8y - 8z + 15 = 0$ **(pt.4)**

- Si determini l'equazione cartesiana di un piano α, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in un'iperbole e di un piano β, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in una parabola. Giustificare la risposta.

  Risposta Non esiste, $z = 4$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o Appello - 05/02/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema

$$\begin{cases} 2x + (1+k)y = 2 \\ x + ky = 1 \\ x + y = k^2 \end{cases}$$

risulta compatibile e, nei casi in cui è compatibile, se ne determino le soluzioni.

Risposta $k = \pm 1$, $S_{-1} = \{(1, 0)\}$, $S_1 = \{(1-t, t)/t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k = 1$, si dica, motivando la risposta, se la matrice completa del sistema è ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta No **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, si considerino i seguenti sottospazi: $U = \mathcal{L}[(1,1,1,0),(0,0,1,0)]$, $W = \mathcal{L}[(2,0,-1,1),(0,0,1,0)]$.

- Si dica, giustificando la risposta, se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta No **(pt.1)**

- Si determini la dimensione e una base di $U^\perp + W^\perp$, somma dei complementi ortogonali di U e W.

Risposta $B = ((1,-1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,0,-2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ sia fissato il riferimento $RA = [O, B] = (1,-1,2),(3,-1,1),(0,1,0)$. Si determinino le componenti in B del vettore $\overrightarrow{QP}$ ove $P = (2,-1,1)$ e $Q = (0,-1,2)$.

Risposta $(2, 0, -1)$ **(pt.2)**

In $E_3(\mathbb{C})$, fissato un riferimento RC, si determini una base dello spazio di traslazione del piano α ortogonale alla retta $r : x = -2y = z$, passante per il punto $H = (0,-5,2)$.

Risposta $((1,2,0),(0,2,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \alpha xy + x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (1, 1)$

  Risposta $\alpha = -3, \beta = 1$ **(pt.2)**

- il punto $P = (1, 1)$ e la retta $p : 3x + 2y + 3 = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = \beta = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere tangenti ai piani $\alpha : x = 1$, $\beta : 3y - 4z = 0$ e aventi centro appartenente alla retta $r : 2x = 2z = -y$.

Risposta $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4, \quad (x-1/3)^2 + (y+2/3)^2 + (z-1/3)^2 = 4/9$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia assegnato il punto $H : [(1,-1,0,0)]$ e la conica $\mathcal{C} : y^2 - z^2 + 2y - 4 = 0 = x - 5$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ luogo delle rette che proiettano da H la conica $\mathcal{C}$. Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 8x - 8y + 11 = 0$ **(pt.4)**

- Si determini l'equazione cartesiana di un piano α, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in un'iperbole e di un piano β, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in una parabola. Giustificare la risposta.

  Risposta $\alpha : x = 5$, non esiste **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o Appello - 05/02/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema

$$\begin{cases} 2x + (k+1)y = 2 \\ x + y = k^2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

risulta compatibile e, nei casi in cui è compatibile, se ne determino le soluzioni.

Risposta $k = \pm 1$, $S_{-1} = \{(1,0)\}$, $S_1 = \{(1-t,t)/t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k = 1$, si dica, motivando la risposta, se la matrice completa del sistema è ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta No **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, si considerino i seguenti sottospazi: $U = \mathcal{L}[(0,-1,0,1),(1,0,0,0)]$, $W = \mathcal{L}[(2,-3,0,1),(0,2,0,0)]$.

- Si dica, giustificando la risposta, se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta No **(pt.1)**

- Si determini la dimensione e una base di $U^\perp + W^\perp$, somma dei complementi ortogonali di U e W.

Risposta $B = ((0,1,0,1),(1,0,0,-2),(0,0,1,0)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ sia fissato il riferimento $RA = [O,B] = (-1,0,4),(2,-1,3),(0,0,1)$. Si determinino le componenti in B del vettore $\overrightarrow{QP}$ ove $P = (-5,0,3)$ e $Q = (4,1,2)$.

Risposta $(-9,-1,1)$ **(pt.2)**

In $E_3(\mathbb{C})$, fissato un riferimento RC, si determini una base dello spazio di traslazione del piano α ortogonale alla retta $r : x = 5y = z$, passante per il punto $H = (-4,-1,6)$.

Risposta $((1,-5,0),(0,-5,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + xy + \alpha x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (2,1)$

  Risposta $\alpha = -5, \beta = -4$ **(pt.2)**

- il punto $P = (2,1)$ e la retta $p : x + 4/5y + 2/5 = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = \beta = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere tangenti ai piani $\alpha : z = 1$, $\beta : 4y - 3x = 0$ e aventi centro appartenente alla retta $r : 2y = 2z = -x$.

Risposta $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4, \quad (x+2/3)^2 + (y-1/3)^2 + (z-1/3)^2 = 4/9$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia assegnato il punto $H : [(-1,1,0,0)]$ e la conica $\mathcal{C} : y^2 + z^2 - 2yz + 4z - 1 = 0 = x - 4$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ luogo delle rette che proiettano da H la conica $\mathcal{C}$. Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro parabolico $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz + 12z - 8y - 8x + 15 = 0$ **(pt.4)**

- Si determini l'equazione cartesiana di un piano α, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in un'iperbole e di un piano β, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in una parabola. Giustificare la risposta.

  Risposta Non esiste, $x = 4$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o Appello - 05/02/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+(k+1)y=1+k^2 \\ x+y=k^2 \end{cases}$$

risulta compatibile e, nei casi in cui è compatibile, se ne determino le soluzioni.

Risposta $k=\pm 1$, $S_{-1}=\{(1,0)\}$, $S_1=\{(1-t,t)/t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=1$, si dica, motivando la risposta, se la matrice completa del sistema è ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta No **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo, si considerino i seguenti sottospazi: $U=\mathcal{L}((1,1,1,0),(-1,-1,0,0))$, $W=\mathcal{L}((-1,-1,0,1),(2,2,0,1))$.

- Si dica, giustificando la risposta, se la somma $U+W$ è diretta.

Risposta No **(pt.1)**

- Si determini la dimensione e una base di $U^\perp+W^\perp$, somma dei complementi ortogonali di U e W.

Risposta $B=((1,-1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ sia fissato il riferimento $RA=[O,B]=(-2,1,0),(1,2,3),(0,1,0)$. Si determinino le componenti in B del vettore $\overrightarrow{QP}$ ove $P=(-1,1,2)$ e $Q=(2,3,4)$.

Risposta $(-3,-2,-2)$ **(pt.2)**

In $E_3(\mathbb{C})$, fissato un riferimento RC, si determini una base dello spazio di traslazione del piano α ortogonale alla retta $r: x=y=-7z$, passante per il punto $H=(3,-1,5)$.

Risposta $((1,0,7),(0,1,7))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri α e $\beta\in\mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}: x^2+y^2+\alpha xy+x+\beta y+1=0$ ha:

- centro nel punto $C=(2,1)$

  Risposta $\alpha=-5, \beta=8$ **(pt.2)**

- il punto $P=(2,1)$ e la retta $p: 5x+2y+4=0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha=\beta=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere tangenti ai piani $\alpha: y=1$, $\beta: 4x-3z=0$ e aventi centro appartenente alla retta $r: 2x=2y=-z$.

Risposta $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$, $(x-1/3)^2+(y-1/3)^2+(z+2/3)^2=4/9$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia assegnato il punto $H:[(0,-1,1,0)]$ e la conica $\mathcal{C}: y^2-x^2+2y-4=0=z-5$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ luogo delle rette che proiettano da H la conica $\mathcal{C}$. Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico $y^2+z^2-x^2-2yz+8z-8y+11=0$ **(pt.4)**

- Si determini l'equazione cartesiana di un piano α, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in un'iperbole e di un piano β, se esiste, che interseca $\mathcal{Q}$ in una parabola. Giustificare la risposta.

  Risposta $\alpha: z=-5$, non esiste **(pt.2)**