UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 03/09/2019

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

ESERCIZIO 1. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & k+2 & k-2 \end{pmatrix}$ una matrice in $\mathbb{R}^{3,4}$ ed $X = {}^T(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathcal{C}_k$ di tutti i vettori B tali che il sistema lineare $A_k X = B$ sia compatibile e la dimensione della copertura lineare dell'insieme $\mathcal{C}_k$.
Risposta $\mathcal{C}_k = \mathcal{L}({}^T(1,2,k),\ {}^T(0,1,2),\ {}^T(k,3,k+2))$; Se $k = 0,4$, $\dim(\mathcal{C}_k) = 2$; se $k \neq 0,4$, $\dim(\mathcal{C}_k) = 3$. **(pt.5)**

ESERCIZIO 2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ una matrice di $M_4(\mathbb{R})$. Si calcolino gli autovalori di A_k al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ e si determini quando la matrice *non* è diagonalizzabile, giustificando la risposta.
Risposta Autovalori: $\{1, 2, k+2, k-2\}$. Se $k \notin \{0,-1,3,4\}$ allora $g_\lambda = a_\lambda = 1$ per ogni autovalore e la matrice è diagonalizzabile; se $k = 0$ allora $g_2 = 1, a_2 = 2$ se $k = -1$, allora $g_1 = 1, a_1, = 2$; se $k = 4$ allora $g_2 = 1, a_2 = 2$, per cui $k \in \{0,-1,4\}$ non è diagonalizzabile; se $k = 3$, allora $a_1 = g_1 = 2$ e la matrice è diagonalizzabile. **(pt.6)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori del parametro reale k i due spazi vettoriali $V = \{(x,y,z,t) : x+y+z = 0, x-y+t = 0\}$ e $W = \mathcal{L}((1,k,1,0),(2,0,1,k))$ sono ortogonali fra loro.
Risposta $k = 1$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ siano dati la rette $r_k : \begin{cases} x+y-kz+3=0 \\ x-ky+4z+2=0 \end{cases}$ ed il piano $\alpha_k : x+y+kz = 7$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{C}$, risulta che α_k ed r_k siano paralleli.
Risposta $k = 0, -1$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{C}_k : x^2 + 2xy + 2kx + ky^2 - 2 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il punto $P = (1,0)$ è il polo della retta $r : (1+k)x + y + 1 = 0$.
Risposta $k = 3$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + 7z^2 + 8xz - 24x - 48z + 80 = 0$. Si:

- classifichi la quadrica, determinando gli eventuali punti doppi e riconoscendo la natura dei suoi punti semplici:
  Risposta Cono, a punti semplici parabolici; $V = (\frac{4}{3}, 0, \frac{8}{3})$ **(pt.4)**
- determini, se esistono, un piano α che intersechi $\mathcal{Q}$ in una iperbole ed un piano β che intersechi $\mathcal{Q}$ in una conica riducibile. Giustificare la risposta.
  Risposta $\alpha : z = 0$, $\beta : y = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 03/09/2019

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

ESERCIZIO 1. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ k & 1 & k+2 & k-1 \end{pmatrix}$ una matrice in $\mathbb{R}^{3,4}$ ed $X = {}^T(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathcal{C}_k$ di tutti i vettori B tali che il sistema lineare $A_k X = B$ sia compatibile e la dimensione della copertura lineare dell'insieme $\mathcal{C}_k$.
Risposta $\mathcal{C}_k = \mathcal{L}({}^T(1,2,k), {}^T(1,0,1), {}^T(k+1,3,k+2))$. Se $k = \frac{5}{3}$, $\dim(\mathcal{C}_k) = 2$; se $k \neq \frac{5}{3}$, $\dim(\mathcal{C}_k) = 3$. ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ una matrice di $M_4(\mathbb{R})$. Si calcolino gli autovalori di A_k al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ e si determini quando la matrice *non* è diagonalizzabile, giustificando la risposta.
Risposta Autovalori: $\{2, 3, k+2, k-1\}$; Se $k \notin \{0, 1, 3, 4\}$ allora $g_\lambda = a_\lambda = 1$ per ogni autovalore e la matrice è diagonalizzabile. Se $k = 0$ allora $g_2 = 1, a_2 = 2$; se $k = 1$, allora $g_3 = 1, a_3, = 2$; se $k = 4$ allora $g_3 = 1, a_3 = 2$, per cui $k \in \{0, 1, 4\}$ non è diagonalizzabile; se $k = 3$, allora $a_2 = g_2 = 2$ e la matrice è diagonalizzabile. ____ **(pt.6)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori del parametro reale k i due spazi vettoriali $V = \{(x, y, z, t) : x + 2y + 3z = 0, x - y + 4t = 0\}$ e $W = \mathcal{L}((1, 2, k, 0), (0, 3, 3, -k-1))$ sono ortogonali fra loro.
Risposta $k = 3$ ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ siano dati la rette r_k : $\begin{cases} x + 2y - kz + 4k = 0 \\ 2x + ky - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\alpha_k : x + 2y - 3kz = 12$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{C}$, risulta che α_k ed r_k siano paralleli.
Risposta $k = 0, 4$ ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ sia $\mathcal{C}_k$: $x^2 - 2xy + 2ky + ky^2 - 2 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il punto $P = (0, 1)$ è il polo della retta $r : x - 2ky + 4 = 0$.
Risposta $k = -2$ ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 7y^2 - z^2 + 8xy - 24x - 48y + 80 = 0$. Si:

- classifichi la quadrica, determinando gli eventuali punti doppi e riconoscendo la natura dei suoi punti semplici:
  Risposta Cono, a punti semplici parabolici; $V = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 0)$ ____ **(pt.4)**
- determini, se esistono, un piano α che intersechi $\mathcal{Q}$ in una iperbole ed un piano β che intersechi $\mathcal{Q}$ in una conica riducibile. Giustificare la risposta.
  Risposta $\alpha : y = 0$, $\beta : z = 0$ ____ **(pt.2)**