UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_k X = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k+2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 2+k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -7$, soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq -7$: stella propria di piani; $k = -7$: piani incidenti solo a due a due ______ **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: \ ((1,0,1),(0,1,1))$; $\beta: \ ((5,k+2,0),(0,-2,5))$; $\gamma: \ ((1,0,0),(0,1,0))$ ______ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = 1$, $\alpha \perp \beta$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y+1\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((k,k,0),(0,1,k+1))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((2,1,0),(1,0,0))$; se $k = 0$: $\dim W_0 = 1$, $\mathcal{B}_{W_0} = ((0,1,1))$; se $k \neq 0$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ ______ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = -1$, $\dim(U + W_{-1}) = 2 = \dim(U \cap W_{-1})$; se $k = 0$, $\dim(U + W_0) = 3$, $\dim(U \cap W_0) = 0$; se $k \neq -1, 0$, $\dim(U + W_k) = 3$, $\dim(U \cap W_k) = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2k & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & k & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = -1$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_{-1}.

  Risposta $((1,2,0),(0,0,1),(2,0,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ x - 2z + 2 = 0 = y$ ed $s: \ 2x - y = 0 = z - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $x^2 + 20xy + 16y^2 - 4z^2 + 8z - 4 = 0$ ______ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0,0,1)$; punti semplici parabolici ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + 20xy + 16y^2 + 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (0,0)$; assi: $x + 2y = 0, 2x - y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 5$, soluzione unica **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq 5$: stella propria di piani; $k = 5$: piani incidenti solo a due a due **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: ((1,0,0),(0,0,1))$; $\beta: ((1,1,0),(-2,0,1))$; $\gamma: ((-2,3,0),(k+1,0,-3))$ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = -\frac{3}{2}$, $\beta \perp \gamma$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x-1\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((k,0,-k),(1,k-2,2))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((1,0,2),(0,0,-1))$; se $k = 0$: $\dim W_0 = 1$, $\mathcal{B}_{W_0} = ((1,-2,2))$; se $k \neq 0$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = 2$, $\dim(U+W_2) = 2 = \dim(U\cap W_2)$; se $k = 0$, $\dim(U+W_0) = 3$, $\dim(U\cap W_0) = 0$; se $k \neq 2, 0$, $\dim(U+W_k) = 3$, $\dim(U \cap W_k) = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -2k & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 2k & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1$ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

- posto $k = -3$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_{-3}.

  Risposta $((-3,2,0),(0,0,1),(1,0,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ x - 2y + 6 = 0 = z$ ed $s: \ x + z = 0 = y - 3$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $x^2 - 4y^2 + z^2 - 10xz + 24y - 36 = 0$ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0,3,0)$; punti semplici parabolici **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $2x^2 + 12xy - 3y^2 + 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (0,0)$; assi: $3x + 2y = 0, 2x - 3y = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -3$, soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq -3$: stella propria di piani; $k = -3$: piani incidenti solo a due a due ______ **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: ((-k+2, 1, 0), (-5, 0, 1))$; $\beta: ((1, 2, 0), (0, 1, 1))$; $\gamma: ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ ______ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = 9$, $\alpha \perp \beta$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3y + 1\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((0, -k, k), (k+2, 5, 0))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((0, 1, 3), (0, 0, 1))$; se $k = 0$: $\dim W_0 = 1$, $\mathcal{B}_{W_0} = ((2, 5, 0))$; se $k \neq 0$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ ______ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = -2$, $\dim(U + W_{-2}) = 2 = \dim(U \cap W_{-2})$; se $k = 0$, $\dim(U + W_0) = 3$, $\dim(U \cap W_0) = 0$; se $k \neq -2, 0$, $\dim(U + W_k) = 3$, $\dim(U \cap W_k) = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2k & -k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = -1$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_{-1}.

  Risposta $((1, 0, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ x - 2y + 2 = 0 = z$ ed $s: \ 2x - z = 0 = y - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $x^2 - 4y^2 + 20xz + 16z^2 + 8y - 4 = 0$ ______ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0, 1, 0)$; punti semplici parabolici ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $-3x^2 + 8xy + 3y^2 - 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (0, 0)$; assi: $x + 2y = 0, 2x - y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ k-2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k-3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 4$, soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq 4$: stella propria di piani; $k = 4$: piani incidenti solo a due a due ______ **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: \ ((1,1,0),(4,0,1))$; $\beta: \ ((2,k-2,0),(0,3,2))$; $\gamma: \ ((1,0,0),(0,1,0))$ ______ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = 12$, $\alpha \perp \beta$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x+1\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((2k,0,k),(0,k-3,1))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((1,0,3),(0,0,1))$; se $k = 0$: $\dim W_0 = 1$, $\mathcal{B}_{W_0} = ((0,-3,1))$; se $k \neq 0$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ ______ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = 3$, $\dim(U+W_3) = 2 = \dim(U \cap W_3)$; se $k = 0$, $\dim(U+W_0) = 3$, $\dim(U \cap W_0) = 0$; se $k \neq 3, 0$, $\dim(U+W_k) = 3$, $\dim(U \cap W_k) = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 8 & k & -2k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = 3$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_3.

  Risposta $((1,0,1),(-3,8,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ y - 2z + 2 = 0 = x$ ed $s: \ x - 2y = 0 = z - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $16x^2 + 20xy + y^2 - 4z^2 + 8z - 4 = 0$ ______ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0,0,1)$; punti semplici parabolici ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $2x^2 + 12xy - 3y^2 + 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (0,0)$; assi: $3x + 2y = 0, 2x - 3y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} k-3 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -6$, soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq -6$: stella propria di piani; $k = -6$: piani incidenti solo a due a due ______ **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: \ ((2, k-3, 0), (0, 9, 2))$; $\beta: \ ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$; $\gamma: \ ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ ______ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = 14$, $\alpha \perp \gamma$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3z - 1\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((0, k+2, k+2), (k, 0, 1))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((0, 3, 1), (0, -1, 0))$; se $k = -2$: $\dim W_{-2} = 1$, $\mathcal{B}_{W_{-2}} = ((-2, 0, 1))$; se $k \neq -2$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ ______ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = 0$, $\dim U + W_0 = 2 = \dim U \cap W_0$; se $k = -2$, $\dim U + W_{-2} = 3$, $\dim U \cap W_{-2} = 0$; se $k \neq 0, -2$, $\dim U + W_k = 3$, $\dim U \cap W_k = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ -1 & k & 4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = 1$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_1.

  Risposta $((1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 0, 1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ x - 2z + 2 = 0 = y$ ed $s: \ 2x - y = 0 = z - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $x^2 + 20xy + 16y^2 - 4z^2 + 8z - 4 = 0$ ______ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0, 0, 1)$; punti semplici parabolici ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $3x^2 - 2y^2 + 12xy + 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (0, 0)$; assi: $2x - 3y = 0, 3x + 2y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 19/1/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il sistema $A_kX = B_k$, dove:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si discuta la compatibilità del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -5$, soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Interpretando, in $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$, ciascuna riga del sistema come equazione cartesiana di un piano (rispettivamente α, β, γ), si discuta la mutua posizione dei tre piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $k \neq -5$: stella propria di piani; $k = -5$: piani incidenti solo a due a due ______ **(pt.2)**

- Si determini una base dello spazio di traslazione di ciascun piano, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $\alpha: \ ((0,1,0),(0,0,1))$; $\beta: \ ((1,1,0),(0,2,1))$; $\gamma: \ ((-3,2,0),(1-k,0,2))$ ______ **(pt.3)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali esiste una coppia di piani perpendicolari e si specifichi quali sono.

  Risposta $k = \frac{3}{2}$, $\beta \perp \gamma$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}(X)$, dove $X = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1-2x\}$ e $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$, dove $Y_k = ((0,k+3,1),(k,0,k))$, $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- basi e dimensioni di U e di W_k;

  Risposta $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = ((0,0,1),(1,0,-2))$; se $k=0$: $\dim W_0 = 1$, $\mathcal{B}_{W_0} = ((0,3,1))$; se $k \neq 0$: $\dim W_k = 2$, $\mathcal{B}_{W_k} = Y_k$ ______ **(pt.2)**

- dimensioni di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$;

  Risposta Se $k = -3$, $\dim U + W_{-3} = 2 = \dim U \cap W_{-3}$; se $k = 0$, $\dim U + W_0 = 3$, $\dim U \cap W_0 = 0$; se $k \neq 0, -3$, $\dim U + W_k = 3$, $\dim U \cap W_k = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & -1 \\ k-1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\nexists \, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = 1$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_1.

  Risposta $((1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r: \ x - 2y + 6 = 0 = z$ ed $s: \ x + z = 0 = y - 3$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta tramite la rotazione della retta r attorno alla retta s.

  Risposta $x^2 - 4y^2 + z^2 - 10xz + 24y - 36 = 0$ ______ **(pt.4)**

- si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ percisando la natura dei suoi punti semplici

  Risposta Cono di vertice $V = (0,3,0)$; punti semplici parabolici ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $12xy + 5y^2 + 2y - 1 = 0$.

- Si classifichi $\mathcal{C}$ e si determinino le coordinate del centro e le equazioni degli assi.

  Risposta Iperbole; centro $C = (-\frac{1}{6}, 0)$; assi: $6x + 9y + 1 = 0$, $6x - 4y + 1 = 0$ ______ **(pt.3)**