UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+2=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y-1$ e il punto $P=(4,1,-2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0$ ______ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $z+2=0=x-4$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z-2=0$ ed il piano $\pi: x+z-6=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(6,-2,0)$, $\quad R=\sqrt{6}$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(5,0,1)$.

  Risposta $x+y+2z-7=0=x+z-6$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ 4x^2+y^2+2kxy+2(k+2)x-1=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=-2,\quad 2x-y-1=0,\quad 2x-y+1=0$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-2\vee k>2$ iperbole, $\quad -2<k<2$ ellisse, $\quad k=2$ parabola ______ **(pt.2)**

Posto $k=1$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_1$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(1,-1\pm i\sqrt{3},0)]$, $\quad C=[(-1,1,1)]$, $\quad [(3\pm\sqrt{13},2,0)]$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+2x+4y+3=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,-1,0)$ ______ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y=0$ e $\beta: 2x-z=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm z+\sqrt{3}=0=x-y$, $\quad \mathcal{C}_\beta$ iperbole ______ **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=0$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-ky+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ kx+z-1=0=2x+(k-2)y+z-k$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(1,1,-1)$.

  Risposta $\nexists\, k\in\mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+1=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y$ e il punto $P=(5,0,-3)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2-4x+6z+4=0$ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $z+3=0=x-5$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-3x+2y+3z-\frac{1}{2}=0$ ed il piano $\pi: x+z-3=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(3,-1,0)$, $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(5/2,0,1/2)$.

  Risposta $x+y+2z-7/2=0=x+z-3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+4y^2+2(k+1)xy+2(1-k)y-1=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=1$, $x+2y-1=0$, $x+2y+1=0$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-3\vee k>1$ iperbole, $-3<k<1$ ellisse, $k=-3$ parabola **(pt.2)**

Posto $k=2$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_2$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(-3\pm\sqrt{5},1,0)]$, $C=[(3,-1,5)]$, $[(-1\pm\sqrt{5},2,0)]$, $\sqrt{5}x+(1\pm\sqrt{5})y-1=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+4x+4y+6=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-2,-1,0)$ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y+1=0$ e $\beta: x-2z+1=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm z+2\sqrt{3}=0=x-y+1$, $\mathcal{C}_\beta$ ellisse **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=0$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k-3)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k-3)x+z-1=0=2x+(k-5)y+z-k+3$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 5$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=4$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(0,0,1)$.

  Risposta $k=4$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+3=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y-2$ e il punto $P=(3,2,-1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2-4y+2z-4=0$ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $z+1=0=x-3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-12x+8y+12z-2=0$ ed il piano $\pi: x+z-12=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(12,-4,0)$, $R=3\sqrt{2}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(1,0,1)$.

  Risposta $5x-4y-7z+2=0=x+z-12$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ 4x^2+y^2+2(k-1)xy+4kx+2y=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=-1$, $2x-y-2=0$, $2x-y=0$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-1\vee k>3$ iperbole, $-1<k<3$ ellisse, $k=3$ parabola **(pt.2)**

Posto $k=0$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_0$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty,Q_\infty=[(1\pm i\sqrt{3},4,0)]$, $C=[(-1,-4,3)]$, $[(-3\pm\sqrt{13},2,0)]$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+2x+8y+2z+8=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,-2,1)$ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y-1=0$ e $\beta: 2x-z-1=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm(z-1)+\sqrt{3}=0=x-y-1$, $\mathcal{C}_\beta$ iperbole **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=1$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k-2)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k-2)x+z-1=0=2x+(k-4)y+z-k+2$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 4$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=3$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(1,1,-1)$.

  Risposta $\nexists\, k\in\mathbb{R}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+2=0$, la retta $r:\ x+y+1=0=z-1$ e il punto $P=(4,-2,1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $y+2=0=x-4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2+6x+4y-6z-2=0$ ed il piano $\pi: x+z-6=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(0,-2,6)$, $R=\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(1,0,5)$.

  Risposta $2x+y+z-7=0=x+z-6$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+4y^2+2(k+2)xy+4x+2(k+4)y+3=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=0$, $x+2y+3=0$, $x+2y+1=0$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-4\vee k>0$ iperbole, $-4<k<0$ ellisse, $k=-4$ parabola **(pt.2)**

Posto $k=1$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_1$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(-3\pm\sqrt{5},1,0)]$, $C=[(7,1,-5)]$, $[(-1\pm\sqrt{5},2,0)]$, $\pm\sqrt{5}x+(\pm3\sqrt{5}-5)y+(\pm2\sqrt{5}-1)=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+2x+4y-2z+2=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,-1,-1)$ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y=0$ e $\beta: x-2z-2=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm(z+1)+\sqrt{3}=0=x-y$, $\mathcal{C}_\beta$ ellisse **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=-1$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k-1)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k-1)x+z-1=0=2x+(k-3)y+z-k+1$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 3$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=2$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(0,0,1)$.

  Risposta $k=2$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+1=0$, la retta $r:\ x+y+1=0=z$ e il punto $P=(5,-3,0)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ ______ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $y+3=0=x-5$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2+3x+2y-3z-\frac{1}{2}=0$ ed il piano $\pi: x+z-3=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(0,-1,3)$, $\quad R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(1/2,0,5/2)$.

  Risposta $2x+y+z-7/2=0=x+z-3$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ 4x^2+y^2+2(k+1)xy+4x-2y=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=-3$, $\quad 2x-y=0$, $\quad 2x-y+2=0$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-3 \vee k>1$ iperbole, $\quad -3<k<1$ ellisse, $\quad k=1$ parabola ______ **(pt.2)**

Posto $k=-2$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_{-2}$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(1\pm i\sqrt{3},4,0)]$, $\quad C=[(-1,2,3)]$, $\quad [(-3\pm\sqrt{13},2,0)]$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+4y+2=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(0,-1,0)$ ______ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y-1=0$ e $\beta: 2x-z-2=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm z=0=x-y-1$, $\quad \mathcal{C}_\beta$ iperbole ______ **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=0$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-2ky+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ 2kx+z-1=0=2x+2(k-1)y+z-2k$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=1/2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(1,1,-1)$.

  Risposta $\nexists\, k\in\mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ x+3=0$, la retta $r:\ x+y+1=0=z-2$ e il punto $P=(3,-1,2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2+2y-4z-4=0$ ________ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $y+1=0=x-3$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2+12x+8y-12z-2=0$ ed il piano $\pi: x+z-12=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(0,-4,12)$, $\quad R=3\sqrt{2}$ ________ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(1,0,1)$.

  Risposta $7x-4y-5z-2=0=x+z-12$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+4y^2+2(k+3)xy-2x-2(2k+4)y=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=-1$, $\quad x+2y-2=0$, $\quad x+2y=0$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-5 \vee k>-1$ iperbole, $\quad -5<k<-1$ ellisse, $\quad k=-5$ parabola ________ **(pt.2)**

Posto $k=-4$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_{-4}$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(1\pm i\sqrt{3},1,0)]$, $\quad C=[(0,-1,1)]$, $\quad [(3\pm\sqrt{13},2,0)]$ ________ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+2x+1=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,0,0)$ ________ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y+1=0$ e $\beta: x-2z=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm z+\sqrt{3}=0=x-y+1$, $\quad \mathcal{C}_\beta$ ellisse ________ **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=0$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k+3)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k+3)x+z-1=0=2x+(k+1)y+z-k-3$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq-1$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=-2$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(0,0,1)$.

  Risposta $k=-2$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ z+2=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y-1$ e il punto $P=(-2,1,4)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2+4x-2y-2z-3=0$ ________ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $x+2=0=z-4$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-6x+6y+4z-2=0$ ed il piano $\pi: x+y-6=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(6,0,-2)$, $\quad R=\sqrt{6}$ ________ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(5,1,0)$.

  Risposta $x+2y+z-7=0=x+y-6$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ 4x^2+y^2+2(k+2)xy+2(3k+8)x+4y+3=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=-4$, $\quad 2x-y-3=0$, $\quad 2x-y-1=0$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-4\vee k>0$ iperbole, $\quad -4<k<0$ ellisse, $\quad k=0$ parabola ________ **(pt.2)**

Posto $k=-2$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_{-2}$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(\pm i,2,0)]$, $\quad C=[(1,4,-2)]$, $\quad [(1,0,0)],\ [(0,1,0)]$ ________ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ 2x^2+y^2-z^2+4x+2y+3=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,-1,0)$ ________ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y=0$ e $\beta: 2y-z=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}y\pm z+\sqrt{3}=0=x-y$, $\quad \mathcal{C}_\beta$ iperbole ________ **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=0$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x+ky+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ kx-z+1=0=2x-(k+2)y+z+k$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq-2$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=-1$ ________ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(1,1,-1)$.

  Risposta $\nexists\ k\in\mathbb{R}$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ z+1=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y$ e il punto $P=(-3,0,5)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2+6x-4z+4=0$ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $x+3=0=z-5$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-3x+3y+2z-1/2=0$ ed il piano $\pi: x+y-3=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(3,0,-1)$, $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(5/2,1/2,0)$.

  Risposta $x+2y+z-7/2=0=x+y-3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+4y^2+2(k-2)xy+2x+4y=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=4$, $x+2y=0$, $x+2y+2=0$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<0\vee k>4$ iperbole, $0<k<4$ ellisse, $k=0$ parabola **(pt.2)**

Posto $k=-1$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_{-1}$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(3\pm\sqrt{5},1,0)]$, $C=[(2,1,1)]$, $[(1\pm\sqrt{5},2,0)]$, $\pm x-(\sqrt{5}\pm3)y+(\sqrt{5}\pm1)=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2+2y^2-z^2+2x+4y+2z+2=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(-1,-1,1)$ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x-y=0$ e $\beta: x-2z+1=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\sqrt{3}x\pm(z-1)+\sqrt{3}=0=x-y$, $\mathcal{C}_\beta$ ellisse **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=1$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k+1)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k+1)x+z-1=0=2x+(k-1)y+z-k-1$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq1$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=0$ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(0,0,1)$.

  Risposta $k=0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 18/12/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino il piano $\alpha:\ z+3=0$, la retta $r:\ x+z+1=0=y-2$ e il punto $P=(-1,2,3)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della sfera con centro sulla retta r, tangente a α, passante per P e di raggio minore;

  Risposta $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ ______ **(pt.3)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e ortogonale a r.

  Risposta $z-3=0=x+1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino la sfera $\Sigma: x^2+y^2+z^2-12x+12y+8z-2=0$ ed il piano $\pi: x+y-12=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi$;

  Risposta $C=(12,0,-4)$, $R=3\sqrt{2}$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta di π tangente a Σ nel punto $P=(1,1,0)$.

  Risposta $5x-7y-4z+2=0=x+y-12$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ x^2+4y^2+2kxy-4x+2(2-3k)y+3=0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere, e per tali valori le rette componenti $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k=2$, $x+2y-3=0$, $x+2y-1=0$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

  Risposta $k<-2\vee k>2$ iperbole, $-2<k<2$ ellisse, $k=-2$ parabola ______ **(pt.2)**

Posto $k=1$ si determinino i punti impropri (reali o immaginari) di $\mathcal{C}_1$ e, se esistono e sono reali, centro, direzioni degli assi e asintoti.

Risposta $P_\infty, Q_\infty=[(-1\pm i\sqrt{3},1,0)]$, $C=[(7,-1,3)]$, $[(-3\pm\sqrt{13},2,0)]$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2-2y^2-z^2-4y-2z-3=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;

  Risposta Cono di vertice $V=(0,-1,-1)$ ______ **(pt.2)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: y-z=0$ e $\beta: x-2z=0$ precisando, nel caso in cui la sezione sia riducibile, le rette componenti;

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile nelle rette $\pm x+\sqrt{3}z+\sqrt{3}=0=y-z$, $\mathcal{C}_\beta$ iperbole ______ **(pt.2)**

- si determini l'equazione di un piano diverso dai precedenti che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.

  Risposta $\pi:\ z=-1$, la conica sezione è riducibile perché $V\in\pi$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\alpha_k: 4x-(k+2)y+3z-3=0$ e la retta $r_k:\ (k+2)x+z-1=0=2x+ky+z-k-2$. Si determinino, se esistono:

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k esiste ed è propria;

  Risposta $k\neq 0$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui r_k è contenuta in α_k;

  Risposta $k=-1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui sia r_k che α_k passano per il punto $P=(1,1,-1)$.

  Risposta $\nexists\, k\in\mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**