Spazi proiettivi

16 novembre 2009

1 Completamento proiettivo di uno spazio affine

Definizione 1. Una *geometria* è una coppia ordinata $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ di insiemi con:

1. Ogni elemento di $\mathcal{L}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}$;
2. Per ogni $P, Q \in \mathcal{P}$ esiste un unico $\ell \in \mathcal{L}$ tale che $P, Q \in \mathcal{L}$.
3. Ogni elemento di $\mathcal{L}$ contiene almeno 2 elementi.

Un esempio di geometria è dato dall'insieme $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ ove $\mathcal{A}$ è l'insieme dei punti di uno spazio affine $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K}) = (\mathcal{A}, V, \alpha)$ e $\mathcal{L}$ è dato dalle sue rette.

Dato uno spazio affine, $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ avente come geometria associata $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ vogliamo costruire una nuova struttura geometrica, che sarà denotata con, $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{G}(n, \mathbb{K}})= (\widehat{A}, \widehat{L})$ che lo contenga. Premettiamo delle definizioni.

Definizione 2. Diciamo *punto proprio* di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ ogni elemento di $\mathcal{A}$; *punto improprio* ogni sottospazio $W \leq V$ avente dimensione 1.

L'insieme dei *punti* di $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{G}(n, \mathbb{K}})$ è dato da tutti i punti propri ed impropri:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{W \leq V : \dim W = 1\}.$$

Definizione 3. L'insieme

$$\mathcal{A}_\infty = \widehat{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$$

è detto *iperpiano all'infinito* di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$.

Osserviamo che la giacitura L di una retta $\ell \in \mathcal{L}$ è un punto improprio; poniamo

$$\widehat{\ell} = \ell \cup \{L\}.$$

La retta $\widehat{\ell}$ è detta *completamento proiettivo* di ℓ o *retta estesa*; in particolare, l'insieme di tutte le rette estese è

$$\widehat{\mathcal{L}_1} = \{\widehat{\ell} : \ell \in \mathcal{L}\}.$$

In particolare, ogni elemento di $\widehat{\mathcal{L}_1}$ interseca $\mathcal{A}_\infty$ in esattamente un punto; inoltre due rette di $\ell, m \in \mathcal{L}$ sono parallele se, e solamente se, le corrispondenti rette proiettive si intersecano in un punto improprio.

Introduciamo ora una nuova famiglia di rette, tutte contenute in $\mathcal{A}_\infty$:

$$\mathcal{L}_2 = \{\{W \in \mathcal{A}_\infty : W \leq T\} : T \leq V \text{ e } \dim T = 2\}.$$

Osserviamo che ogni elemento di $\mathcal{L}_2$ corrisponde esattamente all'insieme di tutte le direzioni delle rette contenute in un piano di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$.

Sia ora

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{L}_2,$$

e osserviamo che la struttura $(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{L}})$ è una geometria. Infatti, comunque dati due punti $P, Q \in \widehat{\mathcal{A}}$ con $P \neq Q$, si possono verificare tre possibilità:

1. $P, Q \in \mathcal{A}$; allora esiste una sola retta di $\ell \in \mathcal{L}$ passante per P, Q in $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e tale retta si completa unicamente ad una retta $\widehat{\ell} \in \widehat{\mathcal{L}}$;

2. $P \in \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{A}_\infty$; allora esiste un'unica retta $\ell \in \mathcal{L}$ passante per P e avente direzione Q; tale retta si completa unicamente ad un $\widehat{\ell} \in \widehat{\mathcal{L}}$;

3. $P, Q \in \mathcal{A}_\infty$; allora esiste un unico sottospazio vettoriale 2–dimensionale T con $P, Q \leq T$; ne segue che questo determina univocamente una retta $\widehat{\ell}$ di $\widehat{\mathcal{L}}$.

Definizione 4. La geometria $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})} = (\widehat{\mathcal{P}}, \mathcal{L})$, ove $\mathcal{L} = \widehat{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{L}_2$ è detta *completamento proiettivo* di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$.

Definizione 5. Si dice *sottospazio* di $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})}$ ogni insieme di punti $\mathcal{S} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ tali che viga una delle seguenti condizioni:

1. $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ è un sottospazio affine di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}_\infty$ consta di tutte le direzioni di rette affini contenute in $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$;

2. $\bigcup \mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Prima di concludere notiamo che tutti i sottospazi di $\widehat{AG(n, \mathbb{K})}$ sono univocamente determinati dalla coppia $(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{L}})$.

Teorema 6. *Sia* $\Sigma \leq \widehat{AG(n, \mathbb{K})}$ *e supponiamo che* $\dim \Sigma > 0$. *Allora,*

$$\Sigma = \{P \in \ell : \ell \in \widehat{\mathcal{L}} \text{ e } |\ell \cap \Sigma| \geq 2\}.$$

Dimostrazione. Sia Σ un sottospazio affine di $AG(n, \mathbb{K})$ avente dimensione almeno 1. Allora vi sono P, Q in Σ con $P \neq Q$ e il vettore $\alpha(P, Q) = \mathbf{t}$ deve appartenere alla giacitura di Σ. In particolare, tutti i punti della forma $S = P + \lambda \mathbf{t}$ sono in Σ. Ne segue che la retta $\ell \in \mathcal{L}$ passante per P e per Q deve essere contenuta in Σ. Pertanto il sottospazio è l'unione di tutte le rette passanti per due suoi punti; per definizione il corrispondente sottospazio completato è proprio dato dall'unione delle rette estese. Supponiamo ora che Σ sia un sottospazio formato da punti imporopri. Allora $\bigcup \Sigma$ è un sottospazio vettoriale di V con $\dim \bigcup \Sigma \geq 2$ e

$$\Sigma = \{W \leq \bigcup \Sigma : \dim W = 1\} = \{W \leq T : T \leq \bigcup \Sigma \text{ e } \dim T = 2, \dim W = 1\}.$$

La tesi segue. □

Si pone ora il problema di fornire delle coordinate per la geometria che abbiamo costruito. Nel paragrafo seguente mostreremo un differente approccio al problema.

2 Spazi proiettivi

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia $(\mathbb{K}^{n+1})^\star = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ e introduciamo una relazione fra i vettori $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n, a_0) \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ In particolare $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ sono *equivalenti* se esiste un $\alpha \in \mathbb{K}^\star = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}.$$

In tale caso scriveremo $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Osserviamo che $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ se, e solamente se vige la relazione

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b} \rangle, \tag{1}$$

cioè $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ generalo il medesimo sottospazio vettoriale 1–dimensionale di $\mathbb{K}^{n+1}$. La relazione $\sim$ è di equivalenza; questo significa che essa è

1. simmetrica, infatti $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$;
2. riflessiva, cioè $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} \sim \mathbf{b}$

3. transitiva, cioè $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ implica $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$.

In particolare $\sim$ induce una partizione dell'insieme $(\mathbb{K}^{n+1})^\star$ in classi di equivalenza a due a due disgiunte. Ognuna di queste classi è della forma

$$\mathbb{K}^\star(a_0, a_1, \dots, a_n) = \{\alpha(a_0, a_1, \dots, a_n) : \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0\},$$

ove $(a_0, \dots, a_n)$ è un vettore non nullo. Scriveremo pertanto

$$\frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}}{\sim} = \frac{(\mathbb{K}^{n+1})^\star}{\mathbb{K}^\star}.$$

Per quanto osservato in (1), vi è una corrispondenza biunivoca naturale fra gli elementi di $\frac{(\mathbb{K}^{n+1})^\star}{\mathbb{K}^\star}$ e i sottospazi 1–dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Definizione 7. Si dice *spazio proiettivo (Desarguesiano) sul campo* $\mathbb{K}$ l'insieme quoziente

$$\mathrm{PG}(n, \mathbb{K}) = \frac{(\mathbb{K}^{n+1})^\star}{\mathbb{K}^\star}.$$

Si dice *sottospazio proiettivo di dimensione* t *di* $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ ogni sottoinsieme Σ di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ tale che

$$\widetilde{\Sigma} = \bigcup_{\mathbb{K}^\star\sigma \in \Sigma} \mathbb{K}^\star\sigma \cup \{\mathbf{0}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$ avente dimensione $t+1$. Tale numero $t+1$ è detto *rango* di Σ.

Al solito, sottospazi proiettivi di dimensione $0, 1, 2, 3, n-1$ sono detti rispettivamente punti, rette, piani, solidi e iperpiani.

Osserviamo che se $V \leq \mathbb{K}^{n+1}$ e $V \neq \{\mathbf{0}\}$, allora esiste un unico sottospazio proiettivo $\widetilde{V}$ tale che

$$\widetilde{V} = \{\mathbb{K}^\star\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

In particolare, esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottospazi vettoriali diversi da $\{\mathbf{0}\}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ e i sottospazi proiettivi di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$; inoltre, per ogni sottospazio proiettivo Σ di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ si ha

$$\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \Sigma$$

e, similmente, per ogni sottospazio vettoriale $V \leq \mathbb{K}^{n+1}$,

$$\widetilde{\widetilde{V}} = V.$$

Alla luce della precedente osservazione, possiamo fornire la seguente definizione.

Definizione 8. Sia $\mathfrak{B} \subseteq \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. Si dice sottospazio proiettivo *generato* da $\mathfrak{B}$ l'insieme di tutti i punti di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ contenuti nello spazio vettoriale generato da tutti i vettori in $\bigcup \mathfrak{B}$.

In generale, nel prosieguo di queste note tenderemo ad identificare i sottospazi proiettivi di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ con opportuni sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Nel caso dei sottospazi proiettivi di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ vale un analogo del Teorema 6. Sia $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^*)$ la geometria ove $\mathcal{P}$ è dato dall'insieme dei punti di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ e $\mathcal{P}^*$ è l'insieme delle rette dello stesso.

Teorema 9. *Sia* $\Sigma \subseteq \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ *un sottospazio proiettivo e supponiamo* $\dim \Sigma \geq 1$. *Allora,*

$$\Sigma = \{P \in \ell : \ell \in \mathcal{P}^*, |\ell \cap \Sigma| \geq 2\}.$$

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio, $\Sigma_0 = \bigcup \Sigma \cup \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$. In particolare,

$$\Sigma_0 = \bigcup_{\substack{W \leq \Sigma_0 \\ \dim W = 2}} W = \bigcup_{\substack{T \leq W \\ W \leq \Sigma_0 \\ \dim T = 1, \dim W = 2}} (T \setminus \{\mathbf{0}\}) \cup \{\mathbf{0}\} = \bigcup_{\substack{\ell \leq \Sigma \\ \dim \ell = 1}} \ell \cup \{\mathbf{0}\}.$$

La tesi segue. □

3 Completamento e spazio proiettivo

Consideriamo ora uno spazio affine $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K}) = (\mathcal{A}, V, \alpha)$ in cui sia assegnato un riferimento $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ e il suo completamento proiettivo $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})}$.

Per ogni punto $P \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$, Indichiamo con $(p_1, \ldots, p_n)$ le coordinate di un generico punto $P \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$. Similmente, scriveremo come $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ le componenti di un vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto la base $\mathfrak{B}$.

Usando questa notazione, possiamo definire una funzione ψ fra i punti di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e l'insieme dei punti di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ come $\psi : \mathcal{A} \to \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ tale che

$$\psi((p_1, p_2, \ldots, p_n)) = \mathbb{K}^\star(p_1, p_2, \ldots, p_n, 1).$$

È immediato verificare che ψ è iniettiva; infatti se $\psi(P) = \psi(Q)$ si ha

$$\mathbb{K}^\star(p_1, p_2, \ldots, p_n, 1) = \mathbb{K}^\star(q_1, q_2, \ldots, q_n, 1),$$

da cui

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, 1) = \beta(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, 1).$$

Poiché l'ultima componente dei vettori è 1 in entrambi i casi, segue $\beta = 1$ e dunque $p_1 = q_1, \ldots, p_n = q_n$. Chiaramente ψ non è suriettiva; ad esempio la classe $\mathbb{K}^\star(1, 0, 0, \ldots, 0)$ non ha preimmagine.

Estendiamo ora ψ ad una funzione $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$, ponendo,

$$\widehat{\psi}(X) = \begin{cases} \psi(X) & \text{se } X \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^\star(v_1, v_2, \ldots, v_n, 0) & \text{se } X \in \mathcal{A}_\infty \text{ e } X = \langle \mathbf{v} \rangle. \end{cases}$$

Osserviamo, innanzi tutto, che $\widehat{\psi}$ è ben definita per gli elementi di $\mathcal{A}_\infty$. Infatti, se $X = \langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} \rangle$ allora

1. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, in quanto $\dim X = 1$;
2. $\exists \alpha \neq 0$ tale che $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{w}$;
3. pertanto i vettori $(v_1, v_2, \ldots, v_n, 0)$ e $(w_1, w_2, \ldots, w_n, 0)$ sono proporzionali per il fattore α e dunque $\mathbb{K}^\star(v_1, v_2, \ldots, v_n, 0) = \mathbb{K}^\star(w_1, w_2, \ldots, w_n, 0)$.

Inoltre, se $\widehat{\psi}(X) = \widehat{\psi}(Y)$ con $X, Y \in \mathcal{A}_\infty$, si ha che esistono due generatori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di X e Y con $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)$; pertanto la funzione $\widehat{\psi}$ è iniettiva. Viceversa, dato un elemento $U = \mathbb{K}^\star(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_0) \in \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ possiamo distinguere due casi:

1. $u_0 = 0$; allora U è immagine dello spazio vettoriale $\langle (u_1, u_2, \ldots, u_n) \rangle \in \mathcal{A}_\infty$;
2. $u_0 \neq 0$; allora esiste in U un elemento della forma
$$\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0}, 1 \right);$$
conseguentemente U è immagine del punto P di coordinate
$$\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0} \right).$$

Ne segue che $\widehat{\psi}$ è anche suriettiva.

Possiamo pertanto dire che lo spazio proiettivo $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ corrisponde al *completamento proiettivo* $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})}$ dello spazio affine $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$, mediante l'immersione $\widehat{\psi}$.

Definizione 10. Sia $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ uno spazio proiettivo e consideriamo un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0)$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. I punti $\mathbb{K}\mathbf{x} \in \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ tali che $x_0 \neq 0$ sono detti *punti affini* o *punti propri* di $\mathrm{PG}(n, KK)$. I punti $\mathbb{K}\mathbf{x} \in \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ appartenenti all'iperpiano $\Sigma_\infty : x_0 = 0$ sono detti *punti impropri* o *punti all'infinito* di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. Tale iperpiano è detto conseguentemente iperpiano all'infinito o iperpiano improprio.

L'immersione $\widehat{\psi}$ è definita sull'insieme dei punti estesi $\widehat{\mathcal{A}}$. Vogliamo ora dimostrare che essa trasforma in effetti sottospazi di $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})}$ in sottospazi di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ e, pertanto, è un isomorfismo.

Iniziamo con il mostrare il seguente teorema.

Lemma 11. *L'immagine di una retta* r *di* $\widehat{\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})}$ *mediante* $\widehat{\psi}$ *è un sottospazio di dimensione* 1 *(e rango 2) di* $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$.

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

1. La retta r è impropria; siano allora P, Q due suoi punti (che in questo caso sono sottospazi 1–dimensionali) e osserviamo che

   $$r = \{W \leq P + Q : \dim W = 1\}.$$

   Poichè ogni punto di r si scrive rispetto a Γ come $\langle \alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \beta(q_1, q_2, \ldots, q_n)\rangle$ con la condizione $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ e $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, si vede che

   $$\widehat{\psi}(r) = \{\mathbb{K}^\star(\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) + \beta(q_1, q_2, \ldots, q_n, 0)) : (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}.$$

   Ne segue che $\widehat{\psi}$ è proprio un sottospazo 1–dimensionale (di rango 2) di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$.

2. Consideriamo ora una generica retta propria r di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$; essa si può descrivere in forma parametrica come

   $$r : X = P + t\mathbf{v}, \tag{2}$$

   ove $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. L'immagine dei punti propri di r mediante ψ consta di tutte le classi del tipo

   $$\mathbb{K}^\star(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, \ldots, p_n + tv_n, 1) = \\ \mathbb{K}^\star(p_1, p_2, \ldots, p_n, 1) + \mathbb{K}^\star(v_1, v_2, \ldots, v_n, 0)$$

Pertanto, $\psi(r)$ è contenuta nel sottospazio proiettivo generato da

$$\mathbb{K}^\star(p_1, p_2, \dots, p_n, 1), \qquad \mathbb{K}^\star(v_1, v_2, \dots, v_n, 0)$$

e, chiaramente, questo è il più piccolo sottospazio che la contiene. Tale sottospazio possidede esattamente un punto improprio, ed esso corrisponde alla direzione $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ della retta r. Ne segue che il sottospazio in oggetto è proprio l'immagine della retta estesa.

□

Notiamo che ad ogni punto improprio del tipo $\mathbb{K}^\star(v_1, v_1, \dots, v_n, 0)$ corrisponde, mediante l'inversa $\widehat{\psi}^{-1}$, la direzione di un fascio di rette parallele. Si vede pertanto che due rette di $AG(n, \mathbb{K})$ sono parallele se, e solamente se, esse si incontrano nel medesimo punto improprio.

Teorema 12. *La corrispondenza* $\widehat{\psi} : \widehat{AG(n, \mathbb{K})} \to PG(n, \mathbb{K})$ *manda sottospazi in sottospazi.*

Dimostrazione. Per i teoremi 6 e 9, basta mostrare che $\widehat{\psi}$ manda rette in rette. Questo è il contenuto del Lemma 11. □

4 Equazioni per sottospazi proiettivi

Mstreremo ora come, a partire da un sottospazio affine di $AG(n, \mathbb{K})$ sia possibile scrivere l'equazione del corrispondente completamento proiettivo e che può essere considerato come un sottospazio di $PG(n, \mathbb{K})$.

Rammentiamo che un sottospazio affine $\mathcal{B}$ di $AG(n, \mathbb{K})$ può sempre scriversi come una intersezione di iperpiani opportuni, ovvero come soluzione di un opportuno sistema lineare (non necessariamente omogeneo) in n incognite. Sia data pertanto l'equazione lineare in n indeterminate

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = -\alpha_0. \tag{3}$$

Le soluzioni di (3) si possono ottenere anche considerando le prime n indeterminate nel seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = -\alpha_0 x_0 \\ x_0 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

L'equazione omogenea

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = -\alpha_0 x_0 \tag{5}$$

può leggersi come equazione fra le classi di $PG(n, \mathbb{K})$. Infatti, data una soluzione $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n, a_0)$ di (5), allora

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i = 0,$$

per cui anche $\lambda\mathbf{a}$ è soluzione e, dunque, tutti gli elementi della classe $\mathbb{K}^\star\mathbf{a}$ lo sono. In particolare, l'equazione (5) descrive il più piccolo iperpiano di $PG(n, \mathbb{K})$, contenente tutte le immagini dei punti di $AG(n, \mathbb{K})$ che soddisfano la (3). La (5) è detta pertanto *equazione proiettiva* dell'iperpiano dato dalla (3).

Le soluzioni della (5) in $PG(n, \mathbb{K})$ che non corrispondono a soluzioni della (3), ovvero quelle per cui $x_0 = 0$, soddisfano

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i = 0,$$

sono cioè soluzioni dell'equzione omogenea associata alla (3). In altre parole, esse costistuiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n-1$, corrispondente alla giacitura di π. In particolare esse corrispondono tramite $\widehat{\psi}$ a direzioni di rette contenute nell'iperpiano; pertanto tali punti sono associati ai punti impropri di $\widehat{\pi}$.

Ancora più in generale, possiamo considerare equazioni algebriche arbitrarie nel seguente modo. Sia

$$f(X_1, \ldots, X_n) = 0 \tag{6}$$

un'equazione algebrica fra i punti di $AG(n, \mathbb{K})$. Tale f può riscriversi in $n+1$ *coordinate omogenee* come

$$f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0, \tag{7}$$

ove, chiaramente, $X_i = \frac{x_i}{x_0}$ e, in prima istanza, si è supposto $x_0 \neq 0$. La (7) è una funzione razionale, ma, in generale, non un polinomio. Poniamo ora $t = \deg f$; di modo che t sia anche il più alto esponente di x_0 che compare a denominatore nella (7). Dunque,

$$\widetilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0) = x_0^t f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$$

risulta un equazione

1. algebrica, in quanto i termini a denominatore si semplificano con x_0^t;
2. omogenea in $n+1$ indeterminate e, pertanto, definita sulle classi di $PG(n+1,\mathbb{K})$;
3. tale che le soluzioni con $x_0 \neq 0$ corrispondano a classi immagine dei punti soluzione della (6).

La $\widetilde{f}$ è detta *omogeneizzazione* della f o *equazione proiettiva* associata alla f.

In generale, enti geometrici di $AG(n,\mathbb{K})$ che soddisfano un sistema di equazioni del tipo

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

ove i varia in un opportuno insieme di indici e i corrispondenti enti in $PG(n,\mathbb{K})$ descritti dal sistema di equazioni omogenee

$$\widetilde{f}_i(x_1, \dots, x_n, x_0)$$

sono chiamati col medesimo nome.

5 Proiettività

Sia $\phi : AG(n,\mathbb{K}) \to AG(n,\mathbb{K})$ una affinità. Allora, è sempre possibile scrivere

$$X' = \phi(X) = AX + B$$

ove X denota il vettore coordinate di un punto generico di $AG(n,\mathbb{K})$, A è una matrice $n \times n$ e B è un vettore di $\mathbb{K}^n$. In particolare si ottiene

$$(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)^T = A(X_1, X_2, \dots, X_n)^T + (B_1, B_2, \dots, B_n)^T.$$

Passando a coordinate proiettive la scrittura diviene

$$\begin{aligned}
&[(x'_1, x'_2, \dots, x_n, 1)] = \\
&\qquad \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + B_1, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i + B_2, \dots \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i + B_n, 1\right)\right] = \\
&\qquad \left[\widehat{A}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)^T + (B_1, B_2, \dots, B_n, 0)^T\right] = [\widetilde{A}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)]
\end{aligned}$$

ove

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In pratica, ogni trasformazione affine ϕ si può rappresentare mediante una trasformazione lineare di $\mathbb{K}^{n-1}$ che manda l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$ in se stesso.

Ogni trasformazione lineare A non singolare di $\mathbb{K}^{n+1}$ può essere fatta agire sugli elementi di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$, ponendo

$$A(\mathbb{K}^\star \mathbf{x}) = \mathbb{K}^\star (A\mathbf{x}).$$

Notiamo che se $B = \alpha A$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\alpha \neq 0$, allora

$$A(\mathbb{K}^\star \mathbf{x}) = A(\mathbb{K}^\star \alpha \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbb{K}^\star \mathbf{x}) = B(\mathbb{K}^\star \mathbf{x}).$$

Pertanto, matrici proporzionali rappresentano la medesima trasformazione.

Definizione 13. Una trasformazione $\theta : \mathrm{PG}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ indotta da un endomorfismo non singolare A di $\mathbb{K}^{n+1}$ è detta *proiettività*.

Prima di concludere il paragrafo, osserviamo che se $\mathbf{x} \in \ker A$, allora $A\mathbf{x}$ non appartiene ad alcuna classe di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$; pertanto l'ipotesi di non singolarità è essenziale affinché l'immagine di un punto secondo θ sia ancora un punto.

6 Dualità

Consideriamo uno spazio proiettivo $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ e indichiamo con $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})^*$ l'insieme di tutti i suoi iperpiani. In generale, un iperpiano di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ è univocamente individuato da un'equazione lineare omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, supponendo che il vettore degli α_i sia diverso da $\mathbf{0}$. In particolare, l'insieme degli iperpiani $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})^*$ può essere identificato con lo spazio proiettivo $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. La corrispondenza Θ

$$\mathbb{K}^\star(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_0) \to \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

che associa a punti iperpiani è detta *dualità* di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. Un *fascio* di iperpiani è l'immagine di una retta di $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ mediante Θ. Osserviamo che, in generale, gli iperpiani di un fascio si intersecano tutti in un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$.