Fattorizzazione LU

9 Ottobre 2009

Sia M una matrice quadrata. Una fattorizzazione di M è un metodo per scrivere

$$M = VW$$

come prodotto di due matrici che godano di proprietà particolari. Lo scopo è quello di ricondurre il problema della risoluzione del sistema lineare

$$MX = B \tag{1}$$

a quello di

$$VY = B, \qquad WX = Y, \tag{2}$$

sotto l'assunto che le equazioni in (2) siano più facili da risolvere che non la (1). In particolare, quello che si vuole evitare è il dover effetturare l'operazione di calcolo della matrice inversa di M.

La fattorizzazione LU, oggetto di questa nota, fornisce una descrizione algebrica della procedura di eliminazione gaussiana. Vedremo nel seguito come essa possa, quando esiste, essere usata per risolvere la (1).

Definizione 1. Si dice che una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ammette una fattorizzazione LU se esistono due matrici $L, U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tali che

1. L è triangolare inferiore e tutte le entrate sulla sua diagonale principale sono 1;

2. U è triangolare superiore;

3. $$M = LU.$$

Caratterizziamo ora le matrici che ammettono una fattorizzazione di questo tipo. Per ogni matrice M, indichiamo con $M^{(p)}$ il minore ottenuto estraendone le prime p righe e le prime p colonne.

Teorema 1. *Una matrice* $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *ammette fattorizzazione* LU *se, e solamente se per ogni* $i = 1, \dots, n$

$$\det M^{(i)} \neq 0.$$

In tale caso la fattorizzazione è unica.

Dimostrazione. Verifichiamo dapprima che la fattorizzazione, quando esiste, è unica. Supponiamo dunque che si abbia $M = LU = L'U'$ con L, L' e U, U' come nella Definizione 1. Poiché sia L' che U sono invertibili, abbiamo

$$(L')^{-1}L = U'U^{-1}.$$

D'altro canto l'inversa di una matrice triangolare inferiore (superiore) è a sua volta triangolare inferiore (superiore); pertanto, la matrice $U'U^{-1}$ è contemporaneamente triangolare inferiore e triangolare superiore e risulta dunque essere diagonale. Inoltre le entrate sulla diagonale principale corrispondono al prodotto delle entrate sulla diagonale di L con quelle di $(L')^{-1}$. Ne segue $(L')^{-1}L = U'U = I$, da cui l'unicità della fattorizzazione.

Dimostriamo ora l'esistenza. Procediamo per induzione sulla dimensione n della matrice

- $n = 1$: è ovvio che una matrice invertibile 1×1 ammette fattorizzazione LU;

- supponiamo che ogni matrice $(n-1) \times (n-1)$ che soddisfi le ipotesi del teorema ammetta fattorizzazione LU. Data una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con

  $$M = \begin{pmatrix} M' & \mathbf{r} \\ \mathbf{s}^T & m \end{pmatrix},$$

  ove M' è una matrice $(n-1) \times (n-1)$, $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ sono vettori colonna di lunghezza $(n-1)$ e $m \in \mathbb{K}$, cerchiamo dunque due matrici

  $$L = \begin{pmatrix} L' & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{pmatrix}; \qquad U = \begin{pmatrix} U' & \mathbf{y} \\ \mathbf{0}^T & u \end{pmatrix}$$

  ove

  1. L' è una matrice triangolare inferiore $(n-1) \times (n-1)$ con tutti 1 sulla diagonale principale;
  2. U' è una matrice triangolare superiore invertibile;
  3. $\mathbf{0}$ è il vettore colonna nullo $(n-1) \times 1$;
  4. $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono vettori colonna $(n-1) \times 1$;

5. $u \in \mathbb{K}$.

Svolgendo il prodotto LU si ottiene

$$LU = \begin{pmatrix} L'U' & L'\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T U' & m - \mathbf{x}^T\mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Questo conduce al sistema

$$L'U' = M', \quad L'\mathbf{y} = \mathbf{r}, \quad (U')^T\mathbf{x} = \mathbf{s}, \quad u = m - \mathbf{x}^T\mathbf{y}.$$

Per l'ipotesi induttiva L' e U' esistono e sono non singolari; pertanto anche le condizioni ulteriori sono risolubili e la matrice M ammette fattorizzazione LU.

Per concludere osserviamo che per costruzione, qualora una matrice ammetta fattorizzazione $M = LU$ si ha

$$\det M^{(p)} = \det L^{(p)} \det U^{(p)} = \det U^{(p)} = \prod_{i=1}^{p} u_{ii}.$$

Poiché $\det U \neq 0$, si ha dunque $\det M^{(p)} \neq 0$ per ogni p. □

Rammentiamo che due sistemi lineari sono equivalenti se, e solamente se, le loro righe generano il medesimo spazio vettoriale. La teoria standard dell'eliminazione gaussiana per un sistema lineare prevede di effettuare le seguenti operazioni sulle righe, al fine di ottenere un sistema *inferiormente ridotto*, ovvero un sistema in cui il numero di indeterminate è decrescente rispetto le righe:

1. moltiplicare una riga per uno scalare non nullo;

2. sommare ad una riga una combinazione lineare delle altre;

3. permutare le righe.

Osserviamo che un sistema inferiormente ridotto ha come matrice incompleta una matrice triangolare superiore.

Osserviamo che l'operazione fondamentale di *sommare alla riga* k *una combinazione lineare delle successive* è rappresentabile mediante una matrice triangolare inferiore della forma

$$M_{k,\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & \tau_{k+1} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tau_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $M_{k,\tau} = I + \tau \mathbf{e_k}^T$ ove

$$\tau = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \dots, \tau_n).$$

Osserviamo che

1. $$M_{k,\tau}^{-1} = M_{k,-\tau}.$$

2. ogni matrice triangolare inferiore

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \tau_{n3} & & 1 \end{pmatrix}$$

   si scrive come prodotto

$$L = M_{k,\tau_1} M_{k,\tau_2} \cdots M_{n-1,\tau_{n-1}}.$$

Pertanto, la decomposizione LU corrisponde esattamente alla decomposizione gaussiana in cui si effettua un'unica operazione fondamentale: *sommare ad una riga una combinazione lineare delle righe successive*. Le matrici del tipo $M_{k,-\tau}$ sono dette *trasformazioni di Gauss*; le componenti non nulle di $-\tau$ sono chiamate *moltiplicatori*, mentre $-\tau$ è detto *vettore di Gauss*.

Come preannunciato, la decomposizione LU è particolarmente utile per studiare i sistemi lineari. Supponiamo infatti si debba risolvere il sistema

$$A\mathbf{x} = B, \tag{3}$$

e che $A = LU$. Procediamo come segue:

1. risolviamo per sostituzione il sistema $L\mathbf{y} = B$;

2. calcoliamo, sempre per sostituzione, le soluzioni di $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Il seguente codice (in Maxima) mostra un metodo per calcolare contemporaneamente le matrici L ed U. La funzione `LUpack` applica la decomposizione gaussiana (per colonne) e determina una matrice

$$X = L + U - I$$

in forma compressa. Le effettive matrici L ed U possono poi essere estratte da questa mediante la funzione `LUdec`.

```
LUpack(A):=block([l,u,i,j,n,k],
        n:length(A),
        array(u,n,n),
        for j:1 thru n do (
                u[1,j]:A[1,j],
                for i:2 thru j do
                 u[i,j]: (A[i,j]-sum(u[i,k]*u[k,j],k,1,i-1)),
                for i:j+1 thru n do
                 u[i,j]:1/u[j,j]*(
                        A[i,j]-sum(u[i,k]*u[k,j],k,1,j-1)
                                )
        ),
        genmatrix(u,n,n)
        );

LUdec(W):=block([l,u,n,i,j],
        n:length(W),
        array(u,n,n),
        array(l,n,n),
        for i:1 thru n do for j:1 thru n do
         ( arrayapply(u,[i,j])::0,
           arrayapply(l,[i,j])::0 ),
        for j:1 thru n do (
            l[j,j]:1,
            u[1,j]:W[1,j],
            for i:2 thru j do
             u[i,j]:W[i,j],
            for i:j+1 thru n do
             l[i,j]:W[i,j]),
        [ genmatrix(l,n,n), genmatrix(u,n,n) ]
        );
```

Esempio 1. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La procedura `LUpack` fornisce

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -5 & -7 & -10 \\ 2 & \frac{3}{5} & -\frac{14}{5} & -5 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{13}{14} & -\frac{19}{14} \end{pmatrix},$$

da cui si deduce

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{13}{14} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{14} \end{pmatrix}$$

In particolare, si ha

$$\det M = \prod_i u_i i = -19$$

Sia ora $B = (2, 3, -1, 4)^T$. Per risolvere il sistema $MX = B$ si determina

$$L\mathbf{y} = B.$$

Per sostituzione si ha

$$\begin{gathered} y_1 = 2, \\ y_2 = 3 - 2 \times y_1 = -1, \\ y_3 = -1 - \tfrac{3}{5} \times y_2 - 2 \times y_1 = -\tfrac{22}{5}, \\ y_4 = 4 - \tfrac{13}{14} \times y_3 + \tfrac{4}{5} \times y_2 = \tfrac{51}{7} \end{gathered}$$

Risolviamo ora

$$UX = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{22}{5} \\ \frac{51}{7} \end{pmatrix}$$

Ragionando dall'ultima riga si ottiene:

$$\begin{gathered} x_4 = -\tfrac{14}{19} \times y_4 = -\tfrac{102}{19} \\ x_3 = -\tfrac{5}{14} \times (y_3 + 5x_4) = \tfrac{212}{19} \\ x_2 = -\tfrac{1}{5}\,(y_2 + 7x_3 + 10x_4) = -\tfrac{89}{19} \\ x_1 = 1 \times (y_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4) = -\tfrac{33}{19} \end{gathered}$$