ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 9 maggio 2007 — Traccia I

COGNOME _____ NOME _____

1 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{u}_4$ in modo che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ siano linearmente indipendenti. Stabilire inoltre se il sottospazio $H = \{(x, y, z, t) | y = z + t = 0\}$ è contenuto in $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathcal{M}(2, \mathbf{R}) \mapsto \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$ così definita $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $\forall A \in \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

3 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix},$$

determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4 Sia $S = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S .

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 0, 0)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta s equidistante dai punti $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale e si dimostri che due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.
- Si dia la definizione di determinante di una matrice quadrata e si enuncino i due teoremi di Laplace.
- Si dia la definizione di retta e piano perpendicolari di uno spazio euclideo tridimensionale e si stabilisca la condizione algebrica di perpendicolarità.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 9 maggio 2007 — Traccia II

COGNOME _____ NOME _____

1 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, -1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{u}_4$ in modo che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ siano linearmente indipendenti. Stabilire inoltre se il sottospazio $H = \{(x, y, z, t) | x = y + t = 0\}$ è contenuto in $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathcal{M}(2, \mathbf{R}) \mapsto \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$ così definita $f(A) = 3(A + A^T), \forall A \in \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

3 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a^2 - 14 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ a + 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice diagonalizzante per S .

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 0, 0)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta s equidistante dai punti $A(0, 0, 2)$ e $B(0, 1, 0)$.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno gli stessi autovalori.
- Si dia la definizione di spazio vettoriale e se ne forniscano degli esempi.
- Si diano le definizioni di affinità e di isometria di uno spazio euclideo e se ne fornisca qualche esempio.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 9 maggio 2007 — Traccia III

COGNOME _____ NOME _____

1 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1, 0).$$

Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{u}_4$ in modo che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ siano linearmente indipendenti. Stabilire inoltre se il sottospazio $H = \{(x, y, z, t) | y = z - t = 0\}$ è contenuto in $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathcal{M}(2, \mathbf{R}) \mapsto \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$ così definita $f(A) = (2A - A^T), \forall A \in \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

3 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a^2 - 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a - 3 \\ 0 \\ a^2 - 9 \end{pmatrix},$$

determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S .

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $D(0, 1, 1)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta s equidistante dai punti $A(0, 2, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di V .
- Si dia la definizione di norma o modulo di un vettore di uno spazio vettoriale euclideo reale e se ne enuncino alcune proprietà.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 9 maggio 2007 — Traccia IV

COGNOME _____ NOME _____

1 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1, 0).$$

Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{u}_4$ in modo che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ siano linearmente indipendenti. Stabilire inoltre se il sottospazio $H = \{(x, y, z, t) | y = z, x - z = 0\}$ è contenuto in $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathcal{M}(2, \mathbf{R}) \mapsto \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$ così definita $f(A) = (2A - 3A^T), \forall A \in \mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$.

3 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S .

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $D(0, -1, 0)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta s equidistante dai punti $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 2, 0)$.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e si forniscano degli esempi di insiemi di generatori per $\mathbf{R}^4$.
- Si diano le definizioni di fascio proprio e di fascio improprio di rette in un piano affine e se ne forniscano degli esempi.
- Si scriva e si dimostri la condizione di perpendicolarità tra due piani in uno spazio euclideo tridimensionale.