Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________ — 9 febbraio 2007 — Traccia I

COGNOME ______________ NOME ______________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 In $\mathbf{R}^3$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{(a, b, 2a+b) | a, b \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e, in caso affermativo, determinarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita: $f(x, y, z) = (x, y, 2y + z), \ \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 3x & -y & +2z = 6 \\ x & +2y & +3hz = 2 \\ 5x & +(2-h)y & +(3h+2)z = 8 \end{cases} .$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S é diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano e siano $P(0, 3, -1)$, $Q(1, 1, 2)$ e $R(2, 0, 3)$ tre punti di $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$.

(a) Scrivere l'equazione del piano π per il punto P e parallelo ai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

(b) Scrivere le equazioni cartesiani e parametriche della retta per Q e ortogonale al piano π.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale somma di due sottospazi di uno spazio vettoriale e si enunci la formula di Grassmann.
- Si dia la definizione di spazio affine e se ne fornisca qualche esempio.
- Sia dia la definizione di distanza di un punto P da un piano π in uno spazio euclideo e si mostri come calcolarla note le coordinate di P e l'equazione cartesiana di π.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. ______________________ — 9 febbraio 2007 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II ESONERO ☐ APPELLO

1 In $\mathcal{M}(3,1;\mathbf{R})$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2b+a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(3,1;\mathbf{R})$ e, in caso affermativo, determinarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita: $f(x,y,z) = (x+2y, y, z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui m è un parametro reale

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +2z = m \\ 2x \quad -y \quad +2z = 2 \\ 5x \quad -y \quad -mz = 3m \end{cases} .$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S é diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere l'equazione del piano π per il punto $P(1,3,0)$ e contenente la retta

$$q : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} .$$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta in π passante per P e ortogonale alla retta q.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di V.
- Sia discuta la posizione reciproca di due rette in un piano affine.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 9 febbraio 2007 — Traccia III

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 In $\mathcal{M}(3,1;\mathbf{R})$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{ \begin{pmatrix} a \\ b+3a \\ 0 \end{pmatrix} | a,b \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(3,1;\mathbf{R})$ e, in caso affermativo, determinarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita: $f(x,y,z) = (x, y-2z, z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui m è un parametro reale

$$\begin{cases} 2x & +my & +2z = 2 \\ x & -2y & +z = 1 \\ 3x & +y & +3mz = m+1 \end{cases}.$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S é diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere l'equazione del piano π per il punto $P(3,2,1)$ e parallelo al piano $2x - y + 2z - 1 = 0$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per P e per il punto di intersezione di π con la retta $x = z = 0$.

Argomenti teorici

- Si diano le definizioni di base di uno spazio vettoriale e di base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo reale.
- Si diano le definizioni di fascio proprio e di fascio improprio di rette in un piano affine e se ne forniscano degli esempi.
- Si dia la definizione di distanza d tra due punti di uno spazio euclideo e si dimostri che la distanza tra due punti dello spazio è nulla se e solo se i due punti coincidono.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 9 febbraio 2007 — Traccia IV

COGNOME ____________________ NOME ____________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 In $\mathcal{M}(2,2;\mathbf{R})$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{\begin{pmatrix} a+b & 2a-b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a,b \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x,y,z) = (x+2z, x-z, y+z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui m è un parametro reale

$$\begin{cases} x & +my & -z = 2 \\ 2x & -y & +mz = m \\ x & -(m+1)y & +(1+m)z = 4 \end{cases} .$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori ed autospazi di S e stabilire se essa è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto $P(2,3,4)$ e parallela alla retta

$$q : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} .$$

(b) Determinare e, quando possibile, risolvere le equazioni del piano contenente la retta r e il punto $Q(1,-1,0)$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di relazione di equivalenza, classe di equivalenza ed insieme quoziente. Si forniscano alcuni esempi.
- Si dia la definizione di prodotto vettoriale di due vettori di uno spazio vettoriale euclideo reale e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si mostri come calcolare la distanza di due rette sghembe nello spazio euclideo reale $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ mediante un esempio.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 9 febbraio 2007 — Traccia V

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 In $\mathbf{R}^3$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{(3a - b, a + b, a) | a, b, \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (x - z, x + 2y - z, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e in caso affermativo determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui m è un parametro reale

$$\begin{cases} mx & & +z = 1 + m \\ x & +y & +mz = 0 \\ & -2y & +3mz = 3m - 2 \end{cases}.$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se essa è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere l'equazione di un piano π per il punto $P(3, 1, 1)$ e perpendicolare al piano $2x + y - z + 3 = 0$;

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per P e per il punto di intersezione di π con la retta $y = z = 0$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di gruppo, se ne enuncino le principali proprietà e si forniscano alcuni esempi.
- Si diano le definizioni di prodotto scalare in uno spazio vettoriale reale e di vettori ortogonali. Si dimostri che m vettori non nulli a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti.
- Si diano le definizioni di sottospazio affine e di sottospazi affini paralleli, sottospazi affini incidenti e sottospazi affini sghembi.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 9 febbraio 2007 — Traccia VI

COGNOME ______________________ NOME ______________________

☐ II Esonero ☐ Appello

1 In $\mathcal{M}(2,2;\mathbf{R})$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{\begin{pmatrix} a & a-2b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} | a,b \in \mathbf{R}\}$. Stabilire se $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e una base.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x,y,z) = (x-z, x+2y-z, x)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui m è un parametro reale.

$$\begin{cases} mx & -y & +z = 7m+1 \\ x & +my & +3z = m-1 \\ (m+1)x & +y & +z = 1-m \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori ed autospazi di S e stabilire se essa è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto $P(2,3,4)$ e parallela al vettore $\mathbf{u}(1,0,1)$.

(b) Determinare la posizione reciproca della retta r e della retta

$$s : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di rango di una matrice; si enunci il teorema degli orlati e se ne fornisca un esempio di applicazione.
- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- Si discuta la posizione reciproca di due piani in uno spazio euclideo reale.