## Esame di geometria e algebra

LAUREA ING. \_\_\_\_\_\_ — 2 luglio 2007 — Traccia I

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_

- 1 Denotata con  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ , siano  $V = L(e_2, e_3, e_1)$  e  $W = L(e_2 e_3, e_2 + e_3, e_4)$ . Si determinino la dimensione e una base di  $V \cap W$  e di V + W.
- 2 Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,3), (-1,-1,0), (0,1,1)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare  $\mathcal{B}$  in una base ortornormale di  $\mathbf{R}^3$ .

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} hx & +2y & +z & = 0 \\ x & +hy & = 0 \\ 2hx & +4y & +z & = 0 \\ x & -hy & -z & = h \end{cases}$$

- 4 Sia  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.
- 5 Sia  $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$  lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.
  - (a) Scrivere le equazioni della retta s passante per 0(0,0,0), parallela al piano  $\pi:x-y=1$  e incidente la retta

$$t: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -3t \\ z = t \end{array} \right., t \in \mathbf{R}$$

(b) Determinare la distanza del punto B(2, 1, -1) dalla retta t.

## ARGOMENTI TEORICI

- Si enunci il teorema della base incompleta e se ne mostri un'applicazione completando l'insieme  $\{(1,0,3)\}$  ad una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- Si diano le definizioni di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore di una matrice quadrata. Che relazione intercorre tra le due molteplicità?
- Si dia la definizione di distanza tra due punti di un spazio euclideo tridimensionale e si determini il luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi di un segmento assegnato.

## Esame di geometria e algebra

LAUREA ING. \_\_\_\_\_\_ — 2 luglio 2007 — Traccia II

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_

- 1 Denotata con  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^4$ , siano  $V = L(e_2 e_3, e_4, e_1)$  e  $W = L(e_2 e_3, e_2 + e_3, e_2)$ . Si determinino la dimensione e una base di  $V \cap W$  e di V + W.
- 2 Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(4,0,3), (-1,1,0), (0,-2,1)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare  $\mathcal{B}$  in una base ortornormale di  $\mathbf{R}^3$ .

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x,y,z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} hx & -y & +z & = 0 \\ x & +hy & +2hz & = 0 \\ 2hx & -2y & +2z & = 0 \\ hx & -y & +z & = h-1 \end{cases}$$

- 4 Sia  $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.
- 5 Sia  $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$  lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.
  - (a) Scrivere le equazioni della retta s passante per 0(0,0,0), parallela al piano  $\pi:x+y+z=1$  e incidente la retta

$$t: \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = 3t \\ z = t - 1 \end{array} \right., t \in \mathbf{R}$$

(b) Determinare la distanza del punto B(1,0,-1) dalla retta t.

## Argomenti teorici

- Si dia la definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali e se ne forniscano degli esempi.
- Si dia la definizione di riferimento affine e di coordinate affini di un punto in uno spazio affine.
- Si discuta la posizione reciproca di due rette nello spazio euclideo reale.