

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia I

COGNOME _____ NOME _____

☐

II ESONERO

☐

APPELLO

1 In $\mathbf{R}^3$ sono assegnati i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (2, h, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, h), \quad \mathbf{u}_3 = (h, 1, 2).$$

Stabilire se esistono valori reali del parametro h per cui $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sia una base di $\mathbf{R}^3$. Posto $h = 2$ determinare una base del sottospazio $U = \langle \mathcal{S} \rangle$. Determinare inoltre il vettore di U di componenti $(-2, 3)$ rispetto alla base fissata di U .

2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (-1, -1, -3), (0, 1, 1)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y , in cui m è un parametro reale

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ x + 3y = 0 \\ x - 2my = 1 \\ 2x + my = 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $A(0, 1, 0)$, parallela al piano $x - 2y + z - 1 = 0$ e ortogonale alla retta

$$t : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

(b) Determinare la distanza del punto $B(2, 1, -1)$ dalla retta t .

ARGOMENTI TEORICI

- Si dimostri che l'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$.
- Si dia la definizione di riferimento affine e di coordinate affini di un punto in uno spazio affine.
- Si dia la definizione di distanza tra due piani di uno spazio euclideo tridimensionale.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia II

COGNOME _____ NOME _____

☐ II ESONERO

☐ APPELLO

1 In $\mathbf{R}^3$ sono assegnati i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (h, 3, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 1, h), \mathbf{u}_3 = (3, h, 0).$$

Stabilire se esistono valori reali del parametro h per cui $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sia una base di $\mathbf{R}^3$. Posto $h = 3$ determinare una base del sottospazio $U = \langle \mathcal{S} \rangle$. Determinare inoltre il vettore di componenti $(2, -3)$ rispetto alla base fissata di U .

2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(0, 2, 3), (1, 0, 4), (1, 2, 0)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y in cui m è un parametro reale:

$$\begin{cases} 3x & +y & = m - 1 \\ x & +3y & = 0 \\ -2x & +2my & = 1 \\ 2x & +2y & = m \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano. Date le rette s e t di equazioni

$$s : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x - 3y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

Verificare che s e t sono sghembe e determinare le equazioni della retta ortogonale ed incidente entrambe le rette.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di sistema lineare omogeneo e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si diano le definizioni di autovalore, di autovettore e di autospazio di una matrice quadrata.
- Si diano le definizioni di distanza tra due punti di uno spazio euclideo e di sfera. Si ricavi l'equazione di una sfera in uno spazio euclideo tridimensionale.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia III

COGNOME _____ NOME _____

☐ II ESONERO

☐ APPELLO

1 In $\mathbf{R}^3$ è assegnato il sottoinsieme:

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid x + z = h^2 - 1\}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sottoinsieme $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
Scelto un valore di h per cui $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ e determinare il vettore di componenti $(2, -3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ fissata.

2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(2, 3, 1), (0, 1, 4), (2, 1, 0)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y in cui m è un parametro reale:

$$\begin{cases} x & -y & = m + 1 \\ x & +2y & = m \\ mx & -2y & = 1 \\ 2x & +y & = m \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $A(1, -1, 0)$ e incidente ortogonalmente la retta

$$t : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

(b) Determinare la distanza della retta t dal piano $x - z = 2$.

ARGOMENTI TEORICI

- Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme finito di vettori di $\mathcal{V}$. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale generato da $\mathcal{A}$ e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si diano le definizioni di segmento e di punto medio di un segmento in uno spazio affine. Si mostri come calcolare le coordinate del punto medio di un segmento noti gli estremi del segmento stesso.
- Si descrivano i diversi modi di rappresentare un piano in uno spazio affine tridimensionale.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia IV

COGNOME _____ NOME _____

☐

II ESONERO

☐

APPELLO

- 1 In $\mathbf{R}^3$ è assegnato il sottoinsieme:

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid x + z - hy = h^2 - 4\}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sottoinsieme $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
Scelto un valore di h per cui $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ e scrivere il vettore di $\mathcal{K}$ di componenti $(1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ fissata.

- 2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

- 3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y in cui m è un parametro reale:

$$\begin{cases} 2x - y = m \\ mx - 2my = 3 \\ x + y = 0 \\ x - 2y = m \end{cases}$$

- 4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

- 5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

- (a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $A(1, 0, -1)$ e parallela alla retta

$$t : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

- (b) Determinare i punti della retta t a distanza $2\sqrt{2}$ dal piano $x - 2y + z = 0$.

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di lineare indipendenza per un insieme di vettori in uno spazio vettoriale. Si dimostri che un insieme di vettori è linearmente dipendente se, e solamente se, almeno uno dei suoi elementi può scriversi come combinazione lineare degli altri.
- Si dia la definizioni di norma o modulo di un vettore di uno spazio vettoriale euclideo reale e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si descrivano i diversi modi di rappresentare una retta in uno spazio affine tridimensionale.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia V

COGNOME _____ NOME _____

☐

II ESONERO

☐

APPELLO

1 In $\mathbf{R}^3$ è assegnato il sottoinsieme:

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid x + y = h^2 - 9\}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sottoinsieme $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
Scelto un valore di h per cui $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ e scrivere il vettore di $\mathcal{K}$ di componenti $(3, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ fissata.

2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 4), (1, 0, 4), (2, 1, 0)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y in cui m è un parametro reale:

$$\begin{cases} x & -my & = m + 1 \\ x & -3y & = m \\ x & +2y & = -3 \\ 2x & -y & = m - 3 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $A(1, 1, 0)$ e perpendicolare al piano

$$\pi : 2x + 3y - z = 5$$

(b) Determinare i punti della retta s a distanza $2\sqrt{2}$ da π .

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di determinante di una matrice quadrata e se ne enuncino le principali proprietà.
- Si descrivano i diversi modi per rappresentare una retta in un piano.
- Si dia la definizione di sistema lineare compatibile e si fornisca un metodo generale per risolvere un sistema di m equazioni in n incognite.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. _____ — 26 febbraio 2007 — Traccia VI

COGNOME _____ NOME _____

☐ II ESONERO

☐ APPELLO

1 In $\mathbf{R}^3$ è assegnato il sottoinsieme:

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid x - hy + z = 0\}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sottoinsieme $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$. Scelto un valore di h per cui $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ e scrivere il vettore di componenti $(1, -1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{K}$ fissata.

2 Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, sia data la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 1)\}.$$

Mediante il procedimento di Gram–Schmidt trasformare $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y in cui m è un parametro reale:

$$\begin{cases} mx & -y & = m - 1 \\ x & -my & = 0 \\ x & +2y & = 0 \\ x & +my & = 1 - m \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Determinare autovalori e autospazi di S e stabilire se S è diagonalizzabile.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $A(1, 3, 0)$ e perpendicolare al piano

$$\pi : x - y + z = 2$$

(b) Determinare la distanza di s dalla retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

ARGOMENTI TEORICI

- Si dia la definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e si forniscano degli esempi di insiemi di generatori per $\mathbf{R}^4$.
- Si dia la definizione di parametri direttori di una retta e si scriva un modo per calcolarli nel piano o nello spazio affine tridimensionale.
- Si scriva e si dimostri la condizione di perpendicolarità tra due piani in uno spazio euclideo tridimensionale.