Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 26 Novembre 2007 — Traccia I

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Si denoti con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Assegnati i due sottospazi vettoriali $V = L(\overline{e}_1, \overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{e}_1 + 2\overline{e}_4)$ e $W = \{(x, y, z, t) : x + 2y + z = 0, x + t = 0\}$ si determinino dimensione e base di $V \cap W$ e $V + W$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ così definita $f(x, y, z) = (x - y, y - z, 2x - 3z)$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare;

(b) determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) qualora la matrice F sia invertibile, calcolarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, ove h è un parametro reale.

$$\begin{cases} x + hy + z = 0 \\ x - 3z = h \\ y + 2hz = h + 2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $P(0, 1, 0)$, incidente ortogonalmente la retta

$$t : \begin{cases} x = 2 \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}\,.$$

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta t equidistante dai punti $A(1, 1, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

Argomenti teorici

- Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme finito di vettori di $\mathcal{V}$. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale generato da $\mathcal{A}$ e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizioni di norma o modulo di un vettore di uno spazio vettoriale euclideo reale e se ne enuncino alcune proprietà.
- Si dia la definizione di retta e piano paralleli e si determini una condizione algebrica per stabilire se una retta e un piano sono paralleli.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 26 Novembre 2007 — Traccia II

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

1 Si denoti con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Assegnati i due sottospazi vettoriali $V = L(\overline{e}_1, 2\overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{e}_1 - 4\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3)$ e $W = \{(x, y, z, t) : 2x - y + z = 0, 2y - t = 0\}$ si determinino dimensione e base di $V \cap W$ e $V + W$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ così definita $f(x, y, z) = (x + 3y, x + y + z, 2x - 3z)$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare;

(b) determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) qualora la matrice F sia invertibile, calcolarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, ove h è un parametro reale.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ hx - 3z = 2h - 3 \\ y + 2hz = h + 2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -6 & -1 & -6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $P(0, 0, -1)$, incidente ortogonalmente la retta

$$t : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}\,.$$

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta t equidistante dai punti $A(1, -1, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

Argomenti teorici

- Si scrivano le definizioni di rango di una matrice e di orlato di un suo minore; si enunci il teorema degli orlati. Si fornisca almeno un esempio di matrice reale di tipo 3×5 avente rango 2.
- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno gli stessi autovalori.
- Sia dia la definizione di distanza tra due piani di uno spazio euclideo tridimensionale.