I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 24 novembre 2006 — Traccia I

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Nell'insieme di matrici $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab_1 \\ ba_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall\ a, a_1, b, b_1 \in \mathbf{Q}$.

Si stabilisca se $(S, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

2 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$\mathcal{H} = L((2,1,4,3), (-1,1,1,0), (0,3,6,3))$$

$$\mathcal{K} = L((1,0,1,1), (0,1,2,1), (1,-1,,-1,0)).$$

(a) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H}$ o di $\mathcal{K}$.

(b) Verificare che $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

3 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & k \\ 1 & 1-k & 2 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2k & 2k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e se ne enuncino alcune proprietà.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________ — 24 novembre 2006 — Traccia II

COGNOME ______________ NOME ______________

1 In $\mathbf{R}^2$, l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (ad,\ bc)$$

$\forall\ a, b, c, d \in \mathbf{R}^2$.

Si stabilisca se $(\mathbf{R}^2, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

2 In $\mathbf{R}^4$ sono assegnati i due sottoinsiemi:

$$\mathcal{H} = \{(0, 0, z, t) |\ z, t \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathcal{K} = \{(0, y, 0, t) |\ y, t \in \mathbf{R}\}.$$

(a) Si dimostri che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.

(b) Determinare una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

4 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2k \\ k & 2 & 1 & 4 \\ 1+k & 2 & k+1 & 4 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di determinante di una matrice quadrata e se ne enuncino alcune proprietà.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ____________________ — 24 novembre 2006 — Traccia III

COGNOME ____________________ NOME ______________________________

1 Nell'insieme di matrici $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \right\}$ si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2aa_1 \\ bb_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall\ a, a_1, b, b_1 \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$.

Si stabilisca se $(S, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

2 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$\mathcal{H} = L((2,0,1,1), (-1,1,1,0), (0,2,3,1))$$

$$\mathcal{K} = L((1,1,1,0), (2,0,2,1), (1,0,-1,0)).$$

(a) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H}$ o di $\mathcal{K}$.

(b) Si determini la dimensione di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-1 & k \\ 1+k & 1-k & -2 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di campo e se ne forniscano alcuni esempi.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 24 novembre 2006 — Traccia IV

COGNOME ______________________ NOME ______________________

1 In $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a+c, bd)$$

$\forall\ a, c \in \mathbf{R}$ e $b, d \in \mathbf{R}^*$.

Si stabilisca se $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

2 In $\mathbf{R}^4$ sono assegnati i due sottoinsiemi:

$$\mathcal{H} = \{(x, 0, z, 0) |\ x, z \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathcal{K} = \{(x-y, y, 0, 0) |\ x, y \in \mathbf{R}\}.$$

(a) Si dimostri che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.

(b) Determinare una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ e di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 2k & 1 & k \\ 1 & 2 & k+4 & -4 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di rango di una matrice e se ne enuncino alcune proprietà.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 24 novembre 2006 — Traccia V

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 In $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (ac, b + d)$$

$\forall\ a, c \in \mathbf{R}^*$ e $b, d \in \mathbf{R}$.

Si stabilisca se $(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

2 In $\mathbf{R}^4$ sono assegnati i due sottoinsiemi:

$$\mathcal{H} = \{(x, -x, z, 0) |\ x, z \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathcal{K} = \{(x, y, z, -z) |\ x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

(a) Verificare che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.

(b) Completare una base di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.

3 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k+4 & -4 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di matrice invertibile e si descriva un modo di calcolarla mediante un esempio.

I Esonero di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 24 novembre 2006 — Traccia VI

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 In $\mathbf{R}^2$ si definisca l'operazione $\oplus$ ponendo

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a - c, b + d)$$

$\forall\ a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Si stabilisca se $(\mathbf{R}^2, \oplus)$ è un gruppo.

2 In $\mathbf{R}^4$ sono assegnati i due sottoinsiemi:

$$\mathcal{H} = L((1,0,1,1),(2,1,0,1),(1,0,0,0)),$$

$$\mathcal{K} = \{(x,y,z,t) |\ x + z = 0\}.$$

(a) Verificare che $\mathcal{K}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

(b) Determinare una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

3 Si studi il rango della seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & k \\ 1 & 0 & 0 & k \\ k & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k+4 & -4 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Argomento teorico

- Si dia la definizione di relazione d'ordine e se ne fornisca qualche esempio.