Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 19 Settembre 2007 — Traccia I

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Si denoti con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Assegnati i due spazi vettoriali $V = L(\overline{e}_1, \overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{e}_4)$ e $W = \{(x, y, z, t) : y + z = 0, x - 2t = 0\}$ si determini una dimensione e una base di $V \cap W$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ così definita $f(x, y, z) = (x + y, y - z, 2x + y - 3z)$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare;

(b) Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) Qualora la matrice F sia invertibile, calcolarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, ove h è un parametro reale.

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ hx - 3z = h + 1 \\ y - (h-1)z = 2h + 2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 0, 0)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta t equidistante dai punti $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale e si dimostri che due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.
- Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di V.
- Si scriva e si dimostri la condizione di perperpendicolaritá tra due piani in uno spazio euclideo tridimensionale.

Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 19 Settembre 2007 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ______________________________

1 Si denoti con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Assegnati i due spazi vettoriali $V = L(\overline{e}_1, \overline{e}_2 - \overline{e}_4, 2\overline{e}_4)$ e $W = \{(x, y, z, t) : x - 2z = 0, y + t = 0\}$ si determini una dimensione e una base di $V \cap W$.

2 Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ così definita $f(x, y, z) = (y, y - z, 2x + y - 3z)$.

(a) Mostrare che f è un'applicazione lineare;

(b) Determinare la matrice F associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) Qualora la matrice F sia invertibile, calcolarne l'inversa.

3 Discutere e, quando possibile, risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, ove h è un parametro reale.

$$\begin{cases} x + 2hy - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + (h+1)z = h + 2 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 0, 0)$, incidente la retta

$$t : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2 \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 1, -1)$.

(b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta t equidistante dai punti $A(0, 0, 1)$ e $B(0, 1, 0)$.

Argomenti teorici

- Si dia la definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e si forniscano degli esempi di insiemi di generatori per $\mathbf{R}^4$ che non sono basi.
- Si dia la definizione di matrici simili e si dimostri che matrici simili hanno gli stessi autovalori.
- Si diano le definizioni di fascio proprio e di fascio improprio di rette in un piano affine e se ne forniscano degli esempi.