Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. ______________________ — 16 luglio 2007 — Traccia I

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Denotata con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$, siano $V = L(\overline{e}_1 + \overline{e}_4, \overline{e}_3 - \overline{e}_2, \overline{e}_1)$ e $W = \{(x, y, z, t) : 2x + y + z - 2t = 0, x + 3t = 0\}$. Si determinino la dimensione e una base di $V + W$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (3x - z, x + 2y, 4x + 2y + z)$.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} 2x + hy - 2z = h - 1 \\ hx + y = 1 \\ hy + 2z = h^2 - 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S é diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $0(0, 0, 0)$ e incidente ortogonalmente la retta

$$m : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \ , t \in \mathbf{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

(b) Determinare la distanza del punto $B(2, 0, 1)$ dalla retta m.

Argomenti teorici

- Sia S una matrice di $\mathcal{M}(n; \mathbf{R})$. Si dia la definizione di autospazio di S e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(n, 1; \mathbf{R})$.
- Si dia la definizione di sistema lineare compatibile e si fornisca un metodo generale per risolvere un sistema di m equazioni in n incognite.
- Si dia la definizione di parametri direttori di una retta e si scriva un modo per calcolarli nel piano o nello spazio affine tridimensionale.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA ING. ______________________ — 16 luglio 2007 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ______________________________________

1 Denotata con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$, siano $V = L(\overline{e}_1, \overline{e}_3 + \overline{e}_2, \overline{e}_1 - \overline{e}_4)$ e $W = \{(x, y, z, t) : 2x - z - 2t = 0, y + 4t = 0\}$. Si determinino la dimensione e una base di $V + W$.

2 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (x - 2z, 2x + y, x + 2y)$.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto la base canonica di $\mathbf{R}^3$;

(c) Stabilire se A è invertibile e, nel caso, determinarne l'inversa.

3 Discutere e quando possibile risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z in cui h è un parametro reale

$$\begin{cases} hx + y + (1-h)z = 0 \\ (2h-1)x + y + (1-h)z = 0 \\ x + 2z = 2h - 1 \end{cases}$$

4 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali. Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonalizzante per S.

5 Sia $\mathcal{E}^3(\mathbf{R})$ lo spazio euclideo numerico con un fissato riferimento cartesiano.

(a) Scrivere l'equazione del piano contenente la retta

$$m : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

e parallelo al vettore $\overline{v} = (3, -1, 2)$.

(b) Determinare la distanza del punto $B(-3, 1, 1)$ dalla retta m.

ARGOMENTI TEORICI

- Si scrivano le definizioni di rango di una matrice e di orlato di un suo minore; si enunci il teorema degli orlati. Si fornisca almeno un esempio di matrice reale di tipo 3×5 avente rango 2.
- Si scriva la definizione di somma di due sottospazi di uno spazio vettoriale V e si verifichi che tale somma è ancora un sottospazio di V.
- Si dia la definizione di retta e piano paralleli e si determini una condizione algebrica per stabilire se una retta e un piano sono paralleli.